Il modello quadratico di sopravvivenza
(versione provvisoria)

Relazione presentata alle *Giornate di Studio sulla Popolazione, VII Edizione*
Latina, 14/16 febbraio 2007

Andrea Furcht
www.furcht.it/andrea.htm
andrea.furcht@unibocconi.it

Un ringraziamento a Francesco Billari e Carlo Maccheroni per i preziosi consigli e incoraggiamento

Queste pagine presentano alcuni approfondimenti sull'utilizzo di un tratto della parabola, una curva geometrica espressa matematicamente da un semplice polinomio di secondo grado[i], quale funzione di sopravvivenza[ii]. All'inizio dell'800 la quadratica era stata usata nella forma $1\text{-}bx\text{-}ax^2$ da Babbage[iii].
Emergeranno simmetrie, casi estremi e generalizzazioni non ovvie a prime vista; inoltre, la possibilità di generare altre funzioni di sopravvivenza manipolandone i parametri.
La presenza di molte note è diretta principalmente a semplificare la lettura, illustrando i passaggi dei calcoli; la numerazione di formule e paragrafi può essere discontinua, in quanto riflette la stesura originale, ancora in fase di completamento: la presente è provvisoria, per la necessità di ulteriori verifiche ed ampliamenti.

§1 – Una parabola di vita

Adattiamo un'equazione di secondo grado in x a funzione di sopravvivenza: la variabile dipendente corrisponde pertanto ai sopravviventi, x indica invece l'età in anni dallo zero ad omega, limite massimo di longevità.
La funzione sarà quindi $l(x)=l(0)(ax^2+bx+c)$ **[§1.0-1]**[iv] e dovrà naturalmente rispettare le consuete condizioni:

I. essere definita per $x \in [0, \omega)$;
II. avere un valore predefinito positivo per $x = 0$; ad $l(0)$ si assegna di solito come valore una potenza di 10;
III. essere nulla per $x=\omega$ (che può tendere all'infinito);
IV. non essere mai crescente[v]
V. non essere mai negativa (garantito dalla II, III e dalla IV);
VI. non essere mai maggiore del valore iniziale $l(0)$ (garantito dalla II e dalla IV);
VII. possiamo inoltre ritenere preferibile che $T(x)$ sia finito anche nei casi in cui $\omega \to \infty$; non si tratta però di una condizione necessaria.

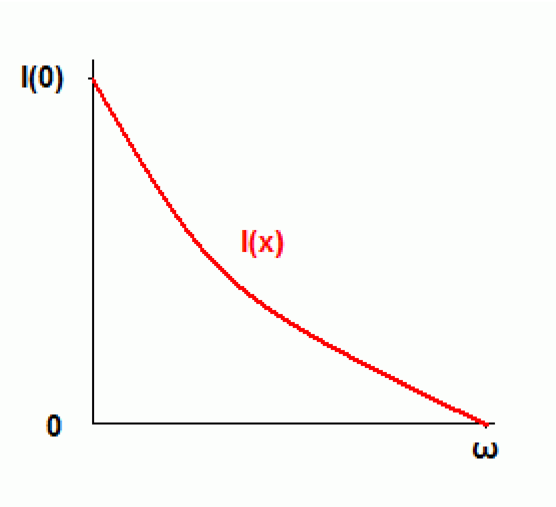

Figura 1 - Curva dei sopravviventi l(x), a>0[vi]

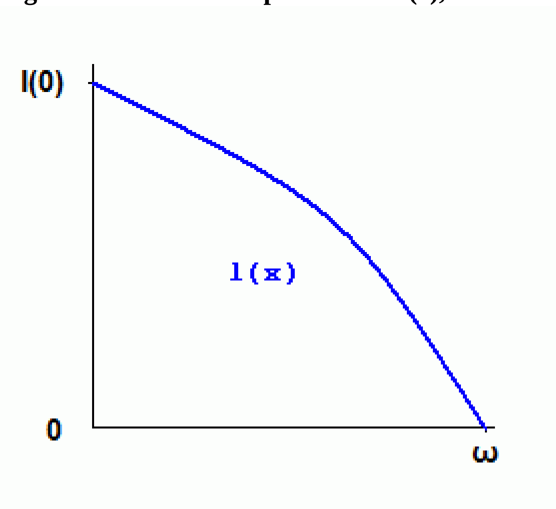

Figura 2 - Curva dei sopravviventi l(x) , a<0

Sulla condizione *I* c'è poco da dire, perché dipende solo da noi. Anche la *II* dà pochi problemi: *c* dovrà per forza essere unitario, e *l(0)* positivo e preferibilmente potenza di 10. Siamo dunque arrivati a $l(x) = l(0)(ax^2+bx+1)$ **[§1.0-2]**

Passiamo alla III: per avere $l(\omega)=0$ dobbiamo porre: $a\omega^2+b\omega+1 = 0$ **[§1.0-3]**. Ne deriva $b=-\frac{a\omega^2+1}{\omega}$ **[§1.0-4]**, da cui: $l(x)=l(0)\left(ax^2-\frac{1+a\omega^2}{\omega}x+1\right)$ **[§1.0-5]**, che si può riscrivere come: $l(x)=l(0)\left(1-\frac{x}{\omega}\right)(1-ax\omega)$ **[§1.0-5a]**.

Una volta che *l(0)* ed $l(\omega)$ sono conformi alle ipotesi, la correttezza del modello viene garantita dalla *IV*. Assicuriamoci dunque che la derivata sia negativa o nulla nel campo d'esistenza (d'ora in poi CdE) di x[vii]. Avremo: $d(x)=l(0)\left(\frac{1+a\omega^2}{\omega}-2ax\right)\geq 0$ **[§1.0-6]**, che implica immediatamente: $\frac{1+a\omega^2}{\omega}\geq 2ax$ **[§1.0-7]**, da cui: $a\omega(\omega-2x)\geq -1$ **[§1.0-7a]**.

Questo significa che:

Età	condizione	risultato
per $0 \le x < \frac{\omega}{2}$	$a \ge \frac{-1}{\omega(\omega - 2x)}$ **[§1.0-7ba]**	la condizione più restrittiva è per $x = 0$: $a \ge -\frac{1}{\omega^2}$
per $x=\frac{\omega}{2}$	$d(x) = l(0)\left(\frac{1}{\omega}\right)$ **[§1.0-7bb]**	qualsiasi *a*, ovvero: nessun vincolo
per $\frac{\omega}{2} > x \ge \omega$	$a \le \frac{1}{\omega(2x-\omega)}$ **[§1.0-7bc]**	la condizione più restrittiva è per $x = \omega$: $a \le \frac{1}{\omega^2}$

Tab. 1.0.1 – Verifica dell'ipotesi IV per i diversi valori di *x*

Congiungendo la **[§1.0-7ba]** con la **[§1.0-7bc]** otteniamo: $-\frac{1}{\omega^2} \le a \le \frac{1}{\omega^2}$ **[§1.0-8]**.

Considerando la derivata seconda della curva dei sopravviventi, avremo: $\frac{d^2 l(x)}{dx^2} = 2a \cdot l(0)$ **[§1.0-9]**.

Ciò significa che la concavità della curva dipende con grande immediatezza dal parametro *a*: se questo è positivo, avremo una curva concava verso l'alto e la *l(x)* occuperà il ramo sinistro della parabola, che avrà il vertice in basso; se è negativo sarà convessa (sempre verso l'alto) e la *l(x)* sarà nel ramo destro (la parabola avrà quindi il vertice in alto); se nullo avremo il caso lineare. È intuitivo, ma ci torneremo analiticamente, che il caso più sfavorevole alla sopravvivenza è quello di una curva concava verso l'alto (quindi con *a* positivo), nel quale i decessi tendono ad essere più precoci rispetto al caso lineare o, a maggior ragione, quello convesso verso l'alto.
Si noti inoltre che i valori estremi di *a* generano una funzione *l(x)* che parte dal (o arriva al) vertice della parabola, che deve infatti verificare la condizione $b = -2ax$ **[§1.0-10]** di massimizzazione della **[§1.0-1]** , che nel nostro caso[viii] corrisponde a: $1 + a\omega^2 = 2xa\omega$ **[§1.0-10a]**.
Dalla **[§1.0-10a]** deriviamo la condizione perché il valore di *x* corrispondente al vertice sia compreso nel campo di esistenza: $0 \le x = \frac{1 + a\omega^2}{2a\omega} \le \omega$ **[§1.0-10b]**. Sviluppando la disequazione otteniamo: $a \le -\frac{1}{\omega^2}$ per *a* negativo, $a \ge \frac{1}{\omega^2}$ per *a* positivo. Ma solo due soluzioni, $a = -\frac{1}{\omega^2}$ **[§1.0-10c]** e $a = \frac{1}{\omega^2}$ **[§1.0-10d]**, sono compatibili con la **[§1.0-8]**. Questo significa che per *a* minimo avremo il vertice all'età zero, per *a* massimo all'età omega; nei casi intermedi di *a*[ix] il vertice non fa parte della funzione dei sopravviventi né come inizio né come fine (tantomeno come punto interno)[x].

§1.1 Il rosso e il nero

Chiameremo ♠ e ♥ le funzioni corrispondenti ai casi estremi di *a*:

Caso	*a*	*l (x)*	note
♠	$\frac{1}{\omega^2}$	$l(0)\cdot\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^2 = l_{DM}(x)\cdot\left(1-\frac{x}{\omega}\right)$ **[§1.1-1a]**[xi]	
DM	0	$l(0)\cdot\left(1-\frac{x}{\omega}\right)$ **[§1.1-1b]**	funzione lineare di De Moivre. Vale la media aritmetica dei casi estremi: ½ [$l_♠(x) + l_♥(x)$]= $l_{DM}(x)$ **[§1.1-1ba]**

♥	$-\frac{1}{\omega^2}$	$l(0)\cdot\left(1-\frac{x^2}{\omega^2}\right) = l_{DM}(x)\cdot\left(1+\frac{x}{\omega}\right)$ **[§1.1-1c]**	

Tab. 1.1.1 – Valori estremi di *a* e curva di sopravvivenza

Concentriamoci adesso ancora sui decessi. Dalla **[§1.0-6]** abbiamo:
$d(x)=\frac{l(0)}{\omega}\left(a\omega^2-2ax\omega+1\right)=d_{DM}(x)\cdot\left(a\omega^2-2ax\omega+1\right)$ **[§1.0-6 bis]**. I decessi sono quindi costituiti da quelli previsti nel caso lineare (vale a dire, dal numero dei nati diviso il numero di anni massimi vivibili) moltiplicati per un fattore correttivo dipendente da x, a, ω; sappiamo già che nel CdE per *a* indicato dalla **[§1.0-8]** tale fattore correttivo non potrà essere negativo; ci interessa però indagare se sia inferiore o meno all'unità, per valutare l'effetto di *a* sui *d(x)* rispetto al caso lineare. L'unità si supera (e quindi i decessi sono maggiori che nella de Moivre) secondo una condizione assai simile alla **[§1.0-7a]**, ovvero $a\omega(\omega-2x)>0$ **[§1.1-2]**. È facile osservare che i decessi sono maggiori che nel caso lineare per *a* positivo nella prima metà dell'arco di vita possibile, e per *a* negativo nella seconda metà: questo indica che *a* è avverso alla sopravvivenza, poiché porta a una morte mediamente più precoce[xii]: torneremo più diffusamente su questo nel §2.
Dai decessi ricaviamo poi il tasso di morte istantaneo, che varrà:
$\mu(x)=\frac{d(x)}{l(x)}=\frac{a\omega^2-2ax\omega+1}{(1-ax\omega)(\omega-x)}=\frac{1}{\omega-x}+\frac{a\omega}{1-ax\omega}$ **[§1.1-3]**.

Nei casi notevoli abbiamo:

Caso	*a*	*d(x)*	*μ(x)*	note
♠	$\frac{1}{\omega^2}$	$2\frac{l(0)}{\omega}\left(1-\frac{x}{\omega}\right)$ **[§1.1-4aa]**	$\frac{2}{\omega-x}$ **[§1.1-4ab]**	$\mu_♠(x) = 2\mu_{DM}(x)$. Anche la forza della mortalità è lineare rispetto all'età; si può constatare una proporzionalità con il caso lineare
DM	0	$\frac{l(0)}{\omega}$ **[§1.1-4ba]**	$\frac{1}{\omega-x}$ **[§1.1-4bb]**	funzione di De Moivre
♥	$-\frac{1}{\omega^2}$	$2\frac{l(0)}{\omega}\frac{x}{\omega}$ **[§1.1-4ca]**	$\frac{2}{\omega-x}\cdot\frac{x}{\omega+x}$ **[§1.1-4cb]**	$\mu_♥(x) = \mu_♠(x)\cdot\left(\frac{x}{\omega+x}\right)$

Tab. 1.1.2 – Tasso di mortalità istantaneo per valori notevoli di *a*

Possiamo leggere questi risultati rispetto alla loro forza relativa rispetto al caso De Moivre – un approfondimento che rimandiamo al §2.

§1.2 Finché c'è vita c'è speranza

Passiamo ora a determinare la speranza di vita: $e(x)=\frac{l(0)\int_x^{\omega}\left[a\xi^2-\frac{1+a\omega^2}{\omega}\xi+1\right]d\xi}{l(x)}$ **[§1.2-1]**, che vale[xiii] $e(x)=\frac{\omega-x}{6}\left(2+\frac{1-a\omega^2}{1-ax\omega}\right)$ **[§1.2-2]**; la speranza di vita alla nascita $\frac{\omega}{6}\left(3-a\omega^2\right)$ **[§1.2-3]**[xiv].
Possiamo anche vedere come si modifichi la speranza di vita al crescere dell'età:

$\frac{de(x)}{dx} = -\frac{a^2\omega^4 - 2a\omega^2 - 4ax\omega + 2a^2x^2\omega^2 + 3}{6(1-ax\omega)^2}$ **[§1.2-4]**[xv]. Questa derivata è sempre negativa[xvi] perché positiva per ogni *a* reale è la quantità al numeratore[xvii], mentre il denominatore non può essere negativo – va naturalmente ricordato che la frazione è preceduta dal segno meno[xviii].

I casi notevoli sono:

Caso	*a*	*l(x)*	*e(x)*	*e(0)*	note
♠	$\frac{1}{\omega^2}$	$l(0)\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^2$	$\frac{\omega - x}{3}$ **[§1.2-5a]**	$\frac{\omega}{3}$	la speranza di vita ha andamento lineare rispetto all'età: e♠(x) = $\frac{2}{3}e_{DM}(x)$. Come nella **[§1.0-18a]** vi è proporzionalità con il caso lineare
DM	0	$l(0)\left(1-\frac{x}{\omega}\right)$	$\frac{\omega - x}{2}$ **[§1.2-5b]**	$\frac{\omega}{2}$	funzione lineare di De Moivre
♥	$-\frac{1}{\omega^2}$	$l(0)\left(1-\frac{x^2}{\omega^2}\right)$	$\frac{\omega - x}{3}\left(\frac{2\omega + x}{\omega + x}\right)$ **[§1.2-5ca]**	$\frac{2\omega}{3}$	e♥(x) = e♠(x) $\cdot \left(1+\frac{\omega}{\omega + x}\right)$ **[§1.2-5cb]**[xix] e♥(0) = 2 e♠(0) = $\frac{4}{3}e_{(DM)}(0)$ **[§1.2-5cc]**

Tab. 1.2.1 – Speranza di vita per valori notevoli di *a*

Possiamo però anche andare oltre, e considerare anche l'età massima omega, e il parametro *a* – legato alla convessità della curva – come variabili.

Ci aspettiamo che $e(x, a, \omega)$ cresca al salire di omega. E infatti abbiamo:
$\frac{\partial e(x,a,\omega)}{\partial \omega} = \frac{(1-a\omega^2)(3-2ax\omega - ax^2)}{6(1-ax\omega)^2}$ **[§1.2-6]**. La quantità racchiusa nella prima parentesi al numeratore è sempre positiva, tranne che per $a = \frac{1}{\omega^2}$ (caso ♠, almeno apparentemente), per il quale si annulla. Dato che tutti gli altri fattori sono sempre positivi, la nostra ipotesi è confermata. D'altra parte *a* si conferma sfavorevole alla sopravvivenza: $\frac{\partial e(x,a,\omega)}{\partial a} = -\frac{\omega(\omega - x)^2}{6(1-ax\omega)^2}$ **[§1.2-7]**.

C'è però un'importante specificazione da fare: la **[§1.2-6]** ci dice cosa succede alla speranza di vita se ω varia mentre *a* rimane costante in valore assoluto, cambiando perciò il valore relativo nel campo di esistenza[xx]. Questo spiega il fatto che derivando la **[§1.2-5a]** rispetto ad ω si ottenga un risultato diverso dal valore della **[§1.2-6]** per $a = \frac{1}{\omega^2}$.

---

[i] Consideriamo il caso più semplice, quello in cui l'asse di simmetria della parabola è parallelo all'asse delle ordinate (si veda la voce *Parabola* in WIKIPEDIA).

[ii] Quella funzione cioè che in demografia indica il numero di membri ancora in vita *l(x)* di una generazione priva di movimenti migratori: con un approccio denominato "longitudinale", la generazione viene seguita dalla nascita contemporanea di *l(0)* individui fino all'estinzione totale.

---

iii Si veda Forfar. In Adler, p.14, troviamo la formula esatta: $l(x) = 6199{,}8 - 9{,}29\frac{x}{1} - 1{,}5767\frac{x(x-1)}{2}$ **[§0-1]**. Una forma della generalizzazione proposta al §3 si ritrova in Littrow, cfr. anche Forfar e soprattutto Adler, che sempre a p.14 dà la formula esatta: $l(x) = 598{,}1673 - 8{,}417455x + 0{,}230895x^2 - 0{,}05247x^3 + 0{,}000032x^4$ **[§0-2]**. Una trattazione della legge di Babbage in Levi, cfr. nota xi.
iv Opto per comodità per il preliminare raccoglimento di *l(0)*: la quantità tra parentesi esprime la probabilità *p(0,x)* di essere ancora in vita a *x* anni dalla nascita.
v Porre la condizione che *l(x)* sia funzione monotona non crescente equivale a postulare la non-negatività della funzione dei decessi; è infatti: $d(x) \equiv -l'(x) \geq 0$ (in altre parole, la demografia non prevede resuscitati).
vi Disegno qualitativo, come nella Figura 2.
vii Il fatto che la funzione *d(x)* non debba mai essere negativa implica che il vertice della parabola non deve trovarsi nel CdE, se non al più – come vedremo – coincidere con il suo confine.
viii Cfr. la **[§1.0-4]**.
ix Eccettuato quello lineare, corrispondente ad *a* nullo, per il quale non si può parlare di vertice.
x Saremmo arrivati alla stessa conclusione partendo da un'analisi grafica delle parabole.
Per *a*>0 abbiamo una parabola con vertice verso il basso: dobbiamo quindi utilizzare per la funzione *l(x)* il ramo sinistro della parabola, che è quello discendente. *x* sarà quindi sempre alla sinistra (vale a dire, minore) del punto di vertice. Il maggiore dei possibili valori di omega (che rappresenta il valore massimo di ogni distribuzione di *x*) si trova nel vertice; sarà quindi $\varpi \leq -\frac{b}{2a} \Rightarrow b \leq -2a\varpi$; sostituendo *b* secondo la **[§1.0-4]**, arriviamo alla condizione destra della **[§1.0-8]**. Per *a*<0 il discorso è inverso: dobbiamo ora avere gli *x* dopo il vertice, o al più (al meno, anzi) coincidente con esso; la nostra attenzione si concentra quindi sull'età zero: avremo $0 \geq -\frac{b}{2a}$, il che completa la **[§1.0-8]**.
xi Troviamo questa funzione in Levi, p.539, quale caso particolare sia della Babbage, sia della formula di Achard $l_x = l_0\left(1 - \frac{x}{\varpi}\right)^k$ **[§1.1-1a.1]** (p.540). Indico l'esponente con *k* per seguire l'originale del Levi; nulla a che vedere pertanto con il parametro *k* che verrà usato nel §2.
xii Già dall'approccio grafico della nota x risulta evidente il ruolo di *a* nel favorire la mortalità precoce.
xiii Otteniamo $e(x) = \frac{\frac{a}{3}(\varpi^3 - x^3) - \frac{1+a\varpi^2}{2\varpi}(\varpi^2 - x^2) + (\varpi - x)}{\left[\frac{ax^2\varpi - (1+a\varpi^2)x + \varpi}{\varpi}\right]}$ **[§1.2.2a]**. Si può moltiplicare sopra e sotto per ϖ e poi raccogliere $\frac{\varpi - x}{6}$. Da $e(x) = \frac{\varpi - x}{6}\left[\frac{3(\varpi - x) - a\varpi^3 - ax\varpi^2 + 2ax^2\varpi}{ax^2\varpi - (1+a\varpi^2)x + \varpi}\right]$ **[§1.2-2b]** otteniamo (scindendo $2ax^2\varpi$ in due addendi): $e(x) = \frac{\varpi - x}{6}\left[1 + \frac{a\varpi(\varpi^2 - x^2) - 2(\varpi - x)}{ax\varpi(\varpi - x) - (\varpi - x)}\right]$ **[§1.2-2c]**, da cui – semplificando ulteriormente la frazione per *(ϖ-x)* si arriva alla **[§1.2-2]**. Si noti che per *x=ϖ* il rapporto vale solo al limite, del tipo $\frac{0}{0}$.
xiv La **[§1.2-3]** può essere riscritta mettendo in evidenza la relazione con la speranza di vita del modello lineare: $e_0 = \frac{\varpi}{2}\left(1 - \frac{a\varpi^2}{3}\right) = \frac{\varpi}{2} - a\frac{\varpi^3}{6} = e_{DM}\left(1 - \frac{a\varpi^2}{3}\right) = e_{DM} - a\frac{\varpi^3}{6}$ **[§1.2-3a]**.
xv Si ricordi che $\frac{de(x)}{dx} = \mu(x)e(x) - 1$ **[§1.2-4a]**. Infatti, differenziando il generico $e(x) = \frac{\int_x^{\varpi} l(\xi)d\xi}{l(x)}$ **[§1.2-4b]** rispetto ad *x*, e ricordando la regola per la derivazione degli integrali espliciti

---

$\frac{d}{dr}\int_{g(r)}^{h(r)} f(r,z)dz = \int_{g(r)}^{h(r)} \frac{\partial f(r,z)}{\partial r}dz + \frac{dh(r)}{dr}\cdot f[r,h(r)] - \frac{dg(r)}{dr}\cdot f[r,g(r)]$ **[§1.2-4c]** otteniamo:

$\frac{de(x)}{dx} = \frac{-l(x)\cdot l(x) - l'(x)\cdot \int_x^{\omega} l(\xi)d\xi}{l^2(x)}$ **[§1.2-4d]**, da cui la **[§1.2-4a]**. Nel nostro caso sarà:

$$\frac{de(x)}{dx} = \frac{\omega - x}{6}\left(2 + \frac{1-a\omega^2}{1-ax\omega}\right)\cdot\frac{a\omega^2 - 2ax\omega + 1}{(1-ax\omega)(\omega - x)} - 1 = \frac{[2(1-ax\omega)+1-a\omega^2](a\omega^2 - 2ax\omega + 1) - 6(1-ax\omega)^2}{6(1-ax\omega)^2}$$

[§1.2-4 bis], che equivale alla **[§1.2-4]**.

xvi Nelle popolazioni reali la speranza di vita può invece avere dei tratti ascendenti, di norma nelle primissime età.

xvii Si tratta di un'equazione di secondo grado in *a*.

xviii Possiamo altrimenti osservare che possiamo riscriverla come $-\frac{1}{6}\cdot\left[2 + \left(\frac{1-a\omega^2}{1-ax\omega}\right)^2\right]$ **[§1.2-4e]**; si noti che il denominatore della **[§1.2-4]** è sempre positivo salvo annullarsi per $x=\omega$ nel caso ♠.

xix È questo il caso che più perde speranza di vita con l'avanzare di *x*; la derivata infatti nel caso ♥ varrebbe:

$\frac{de(x)}{dx} = -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{2\omega^2}{(\omega + x)^2}\right]$ **[§1.2-5cb.1]**. Su queste derivate torneremo; limitiamoci per ora ad osservare che questa maggior perdita di vita del caso ♥ all'avanzare dell'età non deve sorprenderci: se è questo il valore di *a* più favorevole alla sopravivenza fa sì che i decessi tendano ad intensificarsi nelle età più anziane, facendo scendere più che proporzionalmente la speranza di vita con l'invecchiamento. Questo si evince facilmente anche dal rapporto $e_{♥}(x)$ / $e_{♠}(x)$, che vale (cfr. la **[§1.2-5cb]**): $\cdot\left(1 + \frac{\omega}{\omega + x}\right)$ **[§1.2-5cb.2]**.

xx Si veda il legame tra questo e omega, evidenziato nella **[§1.0-11]**.