§2 – Relatività (ristretta)

L'aver individuato i casi ♠ e ♥ può renderci molto più interessati ad uno studio di a in proporzione ai suoi limiti estremi anziché in valore assoluto. Poniamo allora: $a = \frac{k}{\omega^2}$ **[§2.0-1]**, con $|k| \leq 1$ **[§2.0-2]**.

Avremo allora: $l(x) = l(0)\left(\frac{k}{\omega^2}x^2 - \frac{1+k}{\omega}x + 1\right)$ **[§2.0-3]**. Viene così porto su un vassoio d'argento il cambio di variabile $y = \frac{x}{\omega}$ **[§2.0-4]**, con y che rappresenta la proporzione di vita già vissuta rispetto al massimo raggiungibile; sarà pertanto $0 \geq y > 1$ **[§2.0-5]**. Abbiamo a questo punto optato per la formulazione in termini relativi anziché assoluti, che può essere più interessante nello studio della legge di mortalità. A tale formulazione ci si atterrà nel prosieguo dell'esposizione.

La legge di sopravvivenza riscritta in termini relativi sarà: $l(y) = l(0)\{ky^2 - (1+k)y + 1\}$ **[§2.0-6]**; possiamo anche raccogliere l'età (relativa) residua: $l(y) = l(0)(1-y)(1-ky)$ **[§2.0-6a]**.

Scritta in quest'ultima forma, la nostra funzione deriva chiaramente dalla moltiplicazione di tre fattori: il primo, *l(0)*, dà solo l'ordine di grandezza e non influisce sul resto[xxi]; il secondo, (1-*y*), esprime una correlazione positiva (di per sé, proporzionalità) con la proporzione (massima) di vita restante[xxii]; il terzo, che possiamo considerare come una più fine correzione del secondo[xxiii], è (1-*ky*) e non opera per *k* nullo.

§2.1 Gli estremi si toccano

Nel §1 abbiamo definito i casi ♠ e ♥; la semplificazione adottata in questo paragrafo ci consente con maggiore facilità di metterne in evidenza alcune caratteristiche.

Se calcoliamo il valore della media aritmetica dei sopravviventi ad età equidistanti rispetto a quella centrale ½ otteniamo: $\frac{l(y) + l(1-y)}{2} = l(0)\left[\frac{1}{2} - ky(1-y)\right]$ **[§2.1-1]**: un risultato che disegna una curva simmetrica rispetto ad *y* = ½ nell'età centrale, toccando il minimo per *k* positivo e il massimo per *k* negativo .

Ma assai più interessante è un calcolo simile, ma effettuato a casi estremi incrociati:

$l_{♠}(y)+l_{♥}(1-y)=l(0)$ **[§2.1-1.1]**[xxiv] (e, ovviamente, viceversa). Ne discende una curiosa conseguenza, che le due funzioni di mortalità rettangolarizzano (concediamoci un neologismo): in termini più accademici, combaciano se giustapposte in una scatola di Edgeworth[xxv] di altezza *l(0)* e lunghezza corrispondente all'età massima raggiungibile (1 nel nostro caso, un generico ω nell'§1).

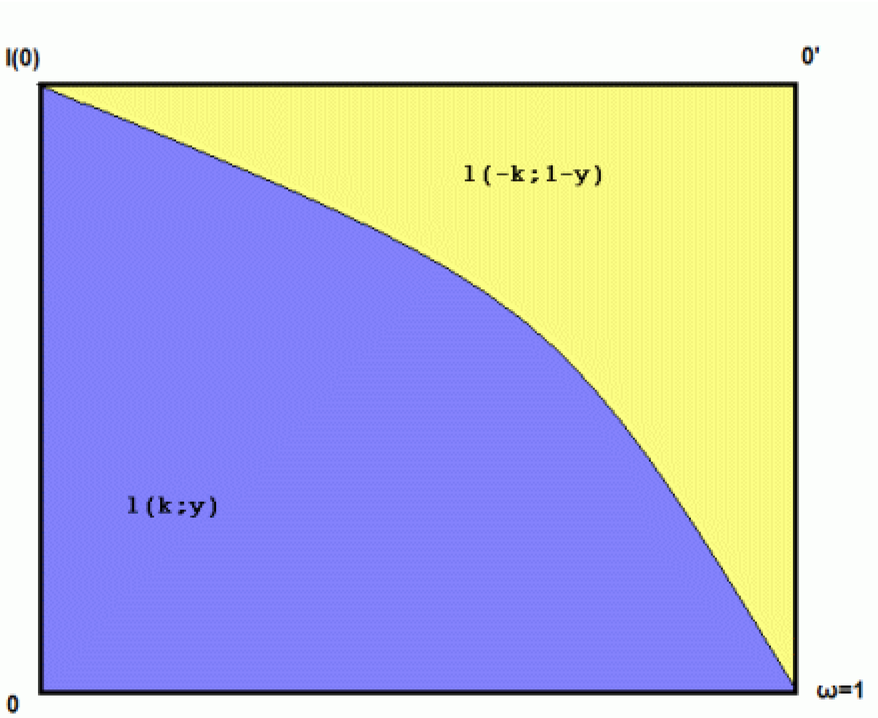

Figura 1 - Due popolazioni sovrapposte[xxvi]

È come se due popolazioni stazionarie, caratterizzate da uguale ammontare di nascite ma diversa (anzi, complementare) legge di mortalità, concorressero per spartirsi un ammontare di anni di vita pari l(0)*ω, il massimo teoricamente vivibile, dato ω, da una sola delle due popolazioni. Torneremo più ampiamente su questo nel §2.7.
Dalla **[§2.0-6]** otteniamo: $d(y) = l(0)(1 + k - 2ky)$ **[§2.1-2]**, che nei casi particolari vale:

Caso	k	d(y)	note
♠	1	*2l(0)(1-y)* **[§2.1-2a]**	i decessi «lineari » sono moltiplicati per il doppio della frazione residua di età massima vivibile
DM	0	*l(0)* **[§2.1-2b]**	il valore è costante a qualsiasi età
♥	-1	*2l(0)y* **[§2.1-2c]**	i decessi «lineari» sono moltiplicati per il doppio della frazione già vissuta di età massima vivibile

Dal momento che il valore delle funzioni continue di flusso è dato dalla tendenza infinitesima proiettata sull'unità di misura, il riferimento di *d(y)* non è più l'anno, come nel §1, bensì l'intero arco di vita massima vivibile[xxvii]. Nel caso lineare, ad esempio, l'ammontare di popolazione eliminato in ogni istante è perfettamente adeguata ad estinguere il gruppo all'età omega senza cambiamenti di passo (tale ammontare è infatti omogeneo a tutte le età). Nel caso ♠, i decessi iniziano con grande intensità (il doppio che nel caso lineare), e poi rallentano. Viceversa nel caso ♥, nel quale i decessi continuano a crescere man mano che ci si avvicina all'età-limite. Se effettuiamo sui decessi l'operazione applicata ai sopravviventi con la **[§2.1-1]**, otteniamo per qualsiasi k il risultato: $\frac{d(y) + d(1-y)}{2} = l(0) = d_{DM}(y)$ **[§2.1-4]**, coerente peraltro con l'intuizione grafica data dalla *Figura 1 - Due popolazioni sovrapposte*.

Si devono notare altre due cose:
1. all'età ½ registriamo lo stesso ammontare di decessi per ogni k[xxviii], corrispondente quindi anche al caso lineare (all'età relativa ½ come alle altre: $d_{DM}(y)$ è costante per età);
2. il caso lineare rappresenta anche la media aritmetica dei decessi dei due casi estremi[xxix].

Rispetto all'età abbiamo:

$\frac{d[d(y)]}{dy} = -2k \cdot l(0)$ **[§2.1-6]**, mentre – considerando anche *k* come una variabile – otterremmo:

$\frac{\partial[d(y,k)]}{\partial k} = l(0)(1-2y)$ **[§2.1-7]** – risulta anche qui evidente il ruolo importante svolto dall'età *y*=½.

Consideriamo ora il tasso istantaneo di mortalità, vedendone anche il valore nei casi estremi:

Caso	*k*	*μ(y)*	note
Generale		$\frac{1+k-2ky}{(1-y)(1-ky)}$ **[§2.1-8]**	interpretabile come: $\frac{1}{1-y}+\frac{k}{1-ky}$ **[§2.1-8 bis]**[xxx]. La mortalità cresce quindi con *k*, a tutte le età[xxxi]
♠	1	$\frac{2}{1-y}$ **[§2.1-8a]**	sempre il doppio che nel caso lineare.
DM	0	$\frac{1}{1-y}$ **[§2.1-8b]**	è il reciproco della frazione di vita mancante all'età massima.
♥	-1	$\frac{2y}{(1-y)(1+y)}$ **[§2.1-8c]**	vale $\mu_{♠}(y)$ moltiplicato per un fattore correttivo che va da 0 a ½ (da 0 a 1 se il raffronto è col caso lineare)

Come si modifica il tasso di mortalità al crescere dell'età o del parametro *k*? Vediamolo con l'ausilio delle derivate parziali:

Derivata	valore	note
$\frac{\partial\mu(y,k)}{\partial y}$	$\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{k^2}{(1-ky)^2}$ **[§2.1-9a]**	sempre positiva: la mortalità cresce in ogni caso con l'età[xxxii]
$\frac{\partial\mu^2(y,k)}{\partial y^2}$	$2\left[\frac{1}{(1-y)^3}+\frac{k^3}{(1-ky)^3}\right]$ **[§2.1-9b]**	mai negativa[xxxiii]
$\frac{\partial\mu(y,k)}{\partial k}$	$\frac{1}{(1-ky)^2}$ **[§2.1-9c]**	mai negativa: *k* si conferma sfavorevole alla sopravvivenza[xxxiv]
$\frac{\partial\mu^2(y,k)}{\partial k^2}$	$\frac{2y}{(1-ky)^3}$ **[§2.1-9d]**	mai negativa
$\frac{\partial\mu^2(y,k)}{\partial k\partial y}$	$\frac{2k}{(1-ky)^3}$ **[§2.1-9e]**	il segno concorda con quello di *k*. Quindi un *k* positivo aggraverà le conseguenze dell'età sulla mortalità, viceversa un *k* negativo le attenuerà. D'altra parte le conseguenze del crescere di *k* si faranno più avverse alla sopravvivenza man mano che si invecchia

È infine il turno della speranza di vita. Avremo:

Caso	*k*	*e(y)*	*e(0)*	note
Generale	=	$\frac{(1-y)(3-k-2ky)}{6(1-ky)}$ **[§2.1-10]**	$\frac{3-k}{6}=\frac{1}{2}-\frac{k}{6}$ **[§2.1-10.1]**	Vale $\frac{1-y}{6}\left(2+\frac{1-k}{1-ky}\right)$ **[§2.1-10 bis]**
♠	1	$\frac{1-y}{3}$ **[§2.1-10a]**	$\frac{1}{3}$ **[§2.1-10a.1]**	

DM	0	$\frac{1-y}{2}$ **[§2.1-10b]**	$\frac{1}{2}$ **[§2.1-10b.1]**	
♥	-1	$\frac{(1-y)(2+y)}{3(1+y)}$ **[§2.1-10c]**	$\frac{2}{3}$ **[§2.1-10c.1]**	$e_♠(y)$ viene moltiplicato per un fattore correttivo che scende con l'età da 2 a 1,5 (il caso lineare viene corretto tra $\frac{4}{3}$ ed 1)[xxxv].

Nonostante il caso lineare coincida con la media aritmetica dei sopravviventi e con quella dei decessi nei casi estremi (cfr. la **[§1.1-1ba]** e la **[§2.1-5]**), questo non vale per la speranza di vita[xxxvi]. In generale avremo infatti: $e_{DM} \geq$ ½ ($e_♠$+$e_♥$); torneremo su questo aspetto con maggiore generalità nel §2.2[xxxvii], allargando l'esame al tasso di mortalità.
Restiamo sulla speranza di vita: avevamo introdotto *y* e *k* anche per studiarne con meno impicci l'andamento al mutare dell'età e della convessità della curva. Ecco allora le derivate della funzione *e(y,k)* (la colonna delle derivate rispetto a *k* ha interesse principalmente nel caso generale)**:**

Caso	∂e(y,k)/∂y	∂e(y,k)/∂k	note
Generale	$-\frac{(1-k)^2+2(1-ky)^2}{6(1-ky)^2} = -\frac{1}{3} - \frac{(1-k)^2}{6(1-ky)^2}$ **[§2.1-11]**	$-\frac{(1-y)^2}{6(1-ky)^2}$ **[§2.1-11 .1]**	Come ci attendevamo, tutte le derivate sono negative.
♠	$-\frac{1}{3}$ **[§2.1-11a]**	$-\frac{1}{6}$ **[§2.1-10a.1]**	Le derivate non dipendono dall'età.
DM	$-\frac{1}{2}$ **[§2.1-11b]**	$-\frac{(1-y)^2}{6}$ **[§2.1-10b.1]**	
♥	$-\frac{(1+y)^2+2}{3(1+y)^2} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3(1+y)^2}$ **[§2.1-11c]**	$-\frac{(1-y)^2}{6(1+y)^2} = \frac{\partial e(y,k)_{DM}}{\partial k} \cdot \frac{1}{(1+y)^2}$ **[§2.1-10c.1]**	Le derivate, a differenza del caso ♠, dipendono dall'età[xxxviii]. L'andamento della speranza di vita rispetto all'età è sempre più ripido rispetto al caso ♠.

§2.2. Come quando fuori piove

Poniamoci ora questa domanda: le coincidenze ravvisate nel §2.1 sono dovute al fatto che con ♠ e ♥ siamo all'estremo del campo d'esistenza del parametro *k*, o vi è una simmetria più generalizzabile? Per rispondere, è bene sostituire *k* con *h*, uguale in modulo al precedente ma sempre positivo. Avremo ora i casi[xxxix]:

Caso	*h*	*l (y)*	note
Generale		$l(0)(1-y)(1\mp hy)$ **[§2.2-1]**	
♣	(0,1]	$l(0)(1-y)(1-hy)$ **[§2.2-1a]**	Comprende il caso ♠ (*h=1*)
DM	0	$l(0)(1-y)$ **[§2.2-1b]**	Vale la media tra ♣ e ♦ caratterizzati da uguale $\bar{h}$
♦	[-1,0)	$l(0)(1-y)(1+hy)$ **[§2.2-1c]**	Comprende il caso ♥ (*h=1*)

Per i decessi sarà:

Caso	*d(y)*	note
♣	*l(0)[1+h(1-2y)]* **[§2.2-2a]**	I decessi sono più alti del caso lineare nella prima metà dell'arco massimo di vita, poi inferiori
DM	*l(0)* **[§2.2-2b]**	
♦	*l(0)[1-h(1-2y)]* **[§2.2-2c]**	Dinamica per età inversa rispetto al caso "fiori": i decessi sono inferiori a quelli « lineari » fino all'età ½, poi diventano superiori

Anche i casi intermedi confermano il ruolo del parametro *k*, sempre favorevole alla mortalità: i sopravviventi del caso ♦ sono infatti sempre superiori a quelli del caso ♣[xl].
È infatti: $l_{\blacklozenge}(y)- l_{\clubsuit}(y) = 2l(0)hy(1-y)$ **[§2.2-3]**. Alle età estreme la differenza è nulla, toccando il massimo per $y=½$ (tutta la funzione è simmetrica rispetto all'età ½).
Nel caso del tasso istantaneo di mortalità, la semidifferenza tra il caso nero e quello rosso vale invece: $½[\mu_{\clubsuit}(y)- \mu_{\blacklozenge}(y)] = \frac{\bar{h}}{1-\bar{h}^2 y^2}$ **[§2.2-5]**; come ci aspettiamo, questa differenza cresce con $\bar{h}$ ed anche, cosa meno ovvia, con l'età.
Dalle formule riportate in questa tavola si nota inoltre a colpo d'occhio che tra fiori e quadri continua a valere la **[§2.1-1.1]**[xli]: la funzione di De Moivre si caratterizza quindi come un vero e proprio asse di simmetria; inoltre, si conferma il ruolo cruciale dell'età $y=½$.
La simmetria sulla De Moivre non tiene invece nel caso del tasso istantaneo di mortalità – la semisomma tra il caso ♣ e quello ♦ dà infatti: $½[\mu_{\clubsuit}(y)+ \mu_{\blacklozenge}(y)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\bar{h}-2\bar{h}y}{(1-y)(1-\bar{h}y)}+\frac{1-\bar{h}+2\bar{h}y}{(1-y)(1+\bar{h}y)}\right] =$

$$= \frac{1-2\bar{h}^2y^2+\bar{h}^2y}{(1-y)(1-\bar{h}y)(1+\bar{h}y)} = \frac{1}{1-y}+\frac{\bar{h}^2y}{1-\bar{h}^2y^2}$$ **[§2.2-4]**.

Si consideri con attenzione la **[§2.2-4]**: si noterà che la media tra casi simmetrici (quindi neri e rossi con parità di $\bar{h}$) è in generale più sfavorevole alla sopravvivenza che non il caso lineare. Lo stesso vale se consideriamo la speranza di vita: $½[e_{\clubsuit}(y)+ e_{\blacklozenge}(y)] = \frac{1-y}{6}\left(2+\frac{1-\bar{h}^2y}{1-\bar{h}^2y^2}\right)$[xlii] **[§2.2-6]**; la semidifferenza è invece: $½[e_{\blacklozenge}(y)-e_{\clubsuit}(y)] = \bar{h}\frac{(1-y)^2}{6(1-h^2y^2)}$ **[§2.2-7]**: anche questa cresce con $\bar{h}$, diminuendo con l'età[xliii].
Dalla **[§2.2-4]** e **[§2.2-6]** notiamo che la De Moivre è sempre meglio (mettendoci dal punto di vista di chi gradisce sopravvivere più a lungo) della media della mortalità tra casi simmetrici, con l'importantissima eccezione dell'età 0, nella quale caso lineare e media di quelli parabolici (simmetrici) si equivale. Nelle età successive, si dovesse "scommettere" sulla propria funzione di sopravvivenza a diversi livelli di rischio[xliv], converrebbe senz'altro ripiegare sulla De Moivre, tanto più quanto più avanza l'età[xlv].
La formula ci fornisce lo spunto per un ulteriore approfondimento: quale sarebbe la funzione dei sopravviventi dettata dal tasso di mortalità medio indicato nella **[§2.2-4]**? Senz'altro non la media aritmetica, perché il tasso risultante nella **[§2.2-4]** è diverso da quello della De Moivre, che è invece media aritmetica tra ♣ e ♦ simmetrici (si veda la **[§2.2-3]**). Calcolando otteniamo:
$l[\mu(y;\ \bar{h}^2 y)] = l(0)(1-y)\sqrt{1-\bar{h}^2y^2}$ **[§2.2-9]**[xlvi], che vale la media geometrica tra i casi simmetrici ♣ e ♦[xlvii]. Miracolo? No, logica: ritornando alla **[§2.2-8]**, vediamo che se partiamo da due funzioni di mortalità (chiamiamole α e β) ricaviamo i sopravviventi dalla media aritmetica dei rispettivi tassi di mortalità istantanei, otteniamo sempre la media geometrica dei sopravviventi delle funzioni di

partenza. Strano a dirsi, è sicuramente più chiaro in formula[xlviii]: $l\{½[\mu_\alpha(x)+\mu_\beta(x)]\}=l(0)e^{-\int_0^x \frac{\mu_\alpha(\xi)+\mu_\beta(\xi)}{2}d\xi}=l(0)e^{-\frac{1}{2}\int_0^x \mu_\alpha(\xi)d\xi}\cdot l(0)e^{-\frac{1}{2}\int_0^x \mu_\beta(\xi)d\xi}=\sqrt{l_\alpha(x)\cdot l_\beta(x)}$ **[§2.2-11]**. Si tratta di un caso particolare della somma ponderata di due tassi mortalità, che nel nostro caso di ♣ e ♦ simmetrici darebbe luogo a: $l(y;\bar{h})=l(0)(1-y)(1-\bar{h}y)^m(1+\bar{h}y)^{1-m}$ **[§2.2-12]**, ove $0 \leq m \leq 1$.

§2.3 Una vita da mediana

Il rettangolo cui accennavamo all'inizio del §2.1, risultante dalla giustapposizione delle due funzioni di sopravvivenza simmetriche (una ♣ e una ♦, caratterizzate però dal medesimo $\bar{h}$), è perciò idealmente tagliato in verticale dall'asse $y=½$. C'è anche un'asse orizzontale di qualche interesse? se esiste, deve corrispondere al valore $l(0)/2$ dell'ordinata, cui corrisponde l'età mediana alla morte calcolata alla nascita. Anche qui, vi sono corrispondenze rilevanti – a parità di $\bar{h}$ – tra ♣ e ♦.

Per trovare l'età mediana va risolta l'equazione:

$\frac{1}{2}=(1-y)(1-ky)$ **[§2.3-1]**, che dà una quadratica: $2ky^2-2(k+1)y+1=0$ **[§2.3-1a]**.

Possiamo però rispondere al quesito più generale "*A quale età la popolazione raggiungerà la proporzione* g"[xlix]? L'equazione corrispondente a $l(y)=gl(0)$ sarà: $ky^2-(k+1)y+(1-g)=0$ **[§2.3-1b]**.

Il risultato sarebbe semplicemente $y^{(g)}=\frac{k+1\pm\sqrt{(1-k)^2+4gk}}{2k}$ **[§2.3-1ba]**[l], ma la soluzione non è così immediata, perché – oltre al fatto che questa deve essere univoca – devono venire rispettate tre condizioni:

A. il determinante non deve essere negativo;
B. la soluzione non deve essere negativa;
C. la soluzione non deve essere maggiore di uno.

Occorre allora distinguere i casi neri da quelli rossi (in linguaggio da casinò), che valgono rispettivamente:

Caso	possibili valori di $y^{(g)}$
♣	$\frac{h+1\pm\sqrt{(1-h)^2+4gh}}{2h}$ **[§2.3-2a]**
♦	$\frac{-(1-h)\pm\sqrt{(1+h)^2-4gh}}{2h}$ **[§2.3-2b]**

Condizione A

Caso ♣: condizione senz'altro soddisfatta, nessuno dei due addendi può essere negativo.
Caso ♦: anche qui la condizione è soddisfatta, anche se con minore immediatezza[li].

Condizione B

Dato che il denominatore delle **[§2.3-2]** è positivo, anche il numeratore deve esserlo per soddisfare questa condizione.

Caso ♣: sarà quindi: $h+1\pm\sqrt{(1-h)^2+4gh}\geq 0$ **[§2.3-3a]**. La soluzione caratterizzata dal segno + davanti alla radice quadrata è senz'altro ammissibile; per l'altra è necessaria un'ulteriore verifica, che comunque dà responso positivo: $h+1\geq\sqrt{(1-h)^2+4gh}\Rightarrow 4h\geq 4gh\Rightarrow g\leq 1$ **[§2.3-3b]**.

Caso ♦: qui la condizione sul numeratore ci porta a: $1-h\mp\sqrt{(1+h)^2-4gh}\leq 0$ **[§2.3-4a]**. Escludiamo subito la soluzione che è somma di due addendi negativi nel **[§2.3-2b]**; l'altra[lii] supera invece la prova, perché avremo: $1-h\leq\sqrt{(1+h)^2-4gh}\Rightarrow 4h\geq 4gh\Rightarrow g\leq 1$ **[§2.3-4b]**.

Condizione C

Caso ♣: dev'essere $h+1\pm\sqrt{(1-h)^2+4gh}\leq 2h\Rightarrow\pm\sqrt{(1-h)^2+4gh}\leq-(1-h)$ **[§2.3-5a]**. Siccome il membro di destra è negativo, possiamo prendere in considerazione solo la radice inferiore in valore; otteniamo: $-\sqrt{(1-h)^2+4gh}\leq-(1-h)\Rightarrow 4gh\geq 0$ **[§2.3-5b]**, condizione senz'altro verificata nelle nostre ipotesi.

Caso ♦: dobbiamo avere $1-h\pm\sqrt{(1+h)^2-4gh}\geq-2h\Rightarrow\pm\sqrt{(1+h)^2-4gh}\geq-(1+h)$ **[§2.3-5a]**. Va senz'altro bene per il radicale minore, per l'altro dobbiamo verificare la condizione $\sqrt{(1+h)^2-4gh}\leq 1+h\Rightarrow-4gh\leq 0$ **[§2.3-5b]**; la verifica viene dunque superata.

Riassumendo i risultati, otteniamo:

Caso	$y^{(g)}$	**età mediana** (g=½)
Generale	$\frac{1}{2}+\frac{1-\sqrt{(1-k)^2+4gk}}{2k}$ **[§2.3-6a]**[liii]	$\frac{k+1-\sqrt{1+k^2}}{2k}$ **[§2.3-6aa]**
♣	$\frac{h+1-\sqrt{(1-h)^2+4gh}}{2h}$ **[§2.3-6b]**[liv]	$\frac{1}{2}+\frac{1-\sqrt{1+h^2}}{2h}$ **[§2.3-6ba]**
♠	$1-\sqrt{g}$ **[§2.3-6c]**	$1-\sqrt{\frac{1}{2}}$ **[§2.3-6ca]**
DM	*1-g* **[§2.3-6d]**	½ **[§2.3-6da]**
♦	$\frac{-(1-h)+\sqrt{(1+h)^2-4gh}}{2h}$ **[§2.3-6e]**[lv]	$\frac{1}{2}-\frac{1-\sqrt{1+h^2}}{2h}$ **[§2.3-6ea]**
♥	$\sqrt{1-g}$ **[§2.3-6f]**	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ **[§2.3-6fa]**

È ovvio che le **[§2.3-6]** sono negativamente correlate alla proporzione di popolazione da raggiungere[lvi]. Le mediane presentano l'usuale simmetria intorno al caso lineare: $y_{♣}^{(g=½)}+y_{♦}^{(g=½)}=1$ **[§2.3-7]**. Per quanto riguarda il generico caso g non si ravvisano invece analogie così appariscenti: ci sarebbe un'eccezione per $y_{♣}^{(g)}+y_{♦}^{(1-g)}=1$ **[§2.3-8]** – che è però una trasposizione della **[§2.2-3]**, guardata stavolta dal punto di partenza delle età e non da quello dei sopravviventi.

La media aritmetica tra casi simmetrici vale: $y(g;\ \bar{h})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{(1+h)^2-4gh}-\sqrt{(1-h)^2+4gh}}{4h}$ **[§2.3-9]**; non è un risultato molto sexy[lvii], ma è compreso, come deve, tra 0 ed 1[lviii]. Questa media sale sempre rispetto ad h, perché la derivata prima è positiva per $h^2\geq 2g(1-g)-1$.

Costruiamo anche due indicatori. Il primo è lo scostamento tra casi simmetrici:

Caso	$y^{(g)}_{k}- y^{(g)}_{-k}$	**età mediana** (g=½)
Generale (♣♦)	$\frac{\sqrt{(1-h)^2+4gh}+\sqrt{(1+h)^2-4gh}-2}{2h}$ **[§2.3-10a]**	$\frac{\sqrt{1+h^2}-1}{h}$ **[§2.3-10b]**[lix]
♠♥	$\sqrt{1-g}+\sqrt{g}-1$ **[§2.3-10.a1]**	$\sqrt{2}-1$ **[§2.3-10.b1]**

Il secondo invece il rapporto tra di essi:

Caso	$y^{(g)}_{k}/ y^{(g)}_{-k}$	**età mediana** (g=½)
Generale (♣♦)	$\frac{(1+h)-\sqrt{(1-h)^2+4gh}}{\sqrt{(1+h)^2-4gh}-(1-h)}$ **[§2.3-11a]**	$\frac{(1+h)-\sqrt{1+h^2}}{\sqrt{1+h^2}-(1-h)}$ **[§2.3-11b]**
♠♥	$\frac{1-\sqrt{g}}{\sqrt{1-g}}$ **[§2.3-11.a1]**	$\sqrt{2}-1$ **[§2.3-11.b1]**[lx]

§2.3.1. Probabilità e imprevisti

Nelle tavole di mortalità si può calcolare anche la "vita probabile" (denominazione non molto felice[lxi]), che segna l'età mediana partendo non da 0, bensì dai sopravviventi a qualsiasi età. Possiamo tranquillamente generalizzare il discorso per comprendere qualsiasi proporzione g, come fatto nel §2.3.

Avremo quindi, mantenendo la notazione con il pi greco: $\pi(y)=\Delta y \Leftarrow l(y+\Delta y)=g\cdot l(y)$ **[§2.3.1-1]**. Sviluppando e portando tutto a sinistra avremo:

$l(0)\{k[(1-g)y^2+2y\Delta y+(\Delta y)^2]-(1+k)[(1-g)y+\Delta y]+(1-g)\}=0$ **[§2.3.1-2]**.

Ma se raccogliamo secondo le potenze di Δy abbiamo una piccola sorpresa:

$l(0)\{k(\Delta y)^2+[2ky-(1+k)]\Delta y+(1-g)[ky^2-(1+k)y+1]\}=0$ **[§2.3.1-2a]**; i coefficienti sono infatti nostre vecchie conoscenze, che ci portano a riscrivere in questa forma:

$kl(0)(\Delta y)^2-d(y)\Delta y+(1-g)l(y)=0$ **[§2.3.1-2a.bis]**. Che interpretazione possiamo dare? Non è poi così difficile, tenuto conto che $(1-g)l(y) = l(y) - g\cdot l(y) = {}_g\Delta\, l(y)$ **[§2.3.1-2b]**. Avremo allora che prolungare la tangente della curva dei sopravviventi presa a segno cambiato (ovvero il valore dei decessi) ci porta ad un valore approssimato di $g\cdot l(y)$, cui va poi sommato un fattore di correzione pari a $-k\cdot l(0)\cdot(\Delta y)^2$ **[§2.3.1-2c]**.

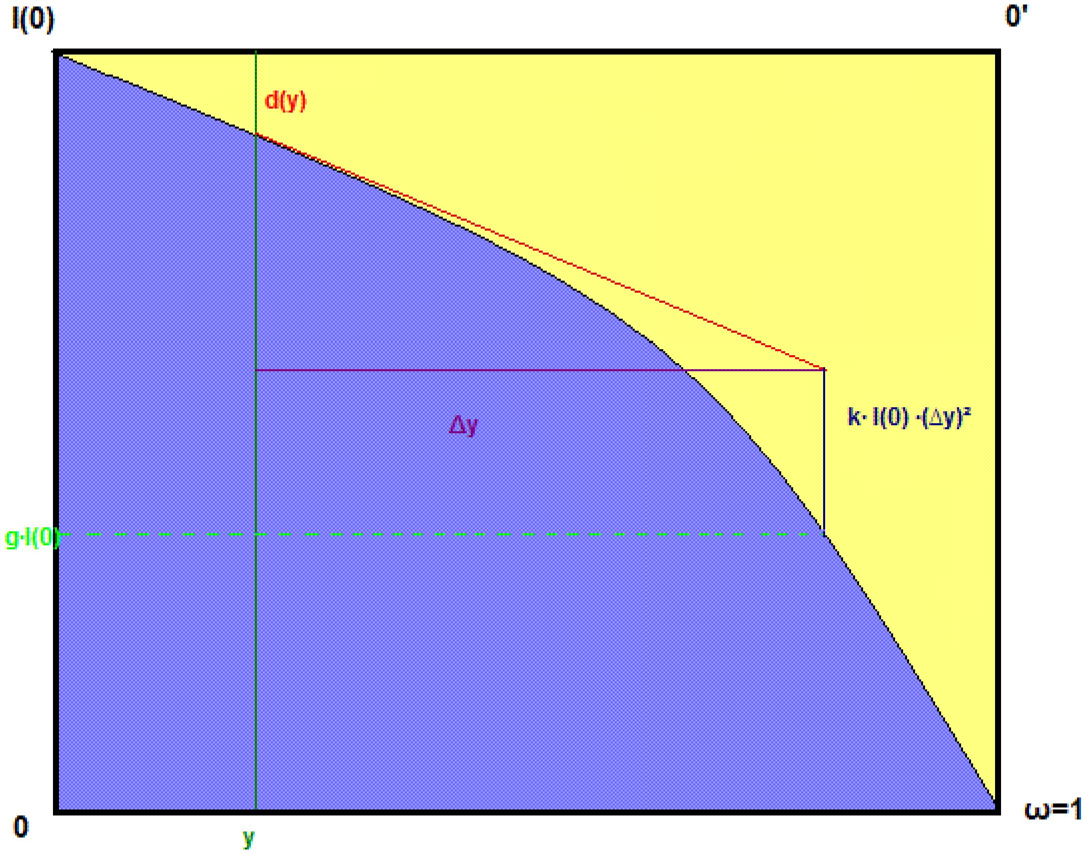

Figura 2 – Vita probabile all'età *y*

§2.4 In media stat virtus

Possiamo a questo punto rivolgere la nostra curiosità verso i valori medi[lxii] di alcune delle quantità demografiche finora investigate[lxiii]. Per avere un quadro più completo, possiamo allargare l'analisi a subpopolazioni ricavate esaminando solo un intervallo del campo di esistenza di *y* (o di *k*).

§2.4.1. Nel mezzo del cammin di nostra vita

Si tratta di un calcolo affine a quello inerente alla speranza di vita: il punto di partenza è infatti il totale degli anni vissuti, che viene diviso però non per i sopravviventi, ma per la lunghezza dell'arco temporale di riferimento. È interessante calcolare questa quantità su un generico arco temporale *[r,s]*, oltre che su tutto l'arco massimo di vita.

La quantità media di sopravviventi per unità di tempo equivale all'ammontare di anni vissuti diviso l'arco temporale; in altri termini (la formula vale anche per *x*) avremmo[lxiv]:

$$M^{r,s}[l(y)] = \frac{\int_r^s l(\upsilon)d\upsilon}{\int_r^s d\upsilon} = \frac{T(r)-T(s)}{s-r}$$ **[§2.4.1-1]**. Con il nostro modello otteniamo un risultato a dire il vero non estremamente spettacolare:

$$M^{r,s}[l(y)] = \frac{l(0)}{6}\left[2kr^2 + 2krs + 2ks^2 - 3r - 3s - 3kr - 3ks + 6\right] = \frac{l(0)}{6}\left[6 - 3(r+s)(1+k) + 2k\left(r^2 + rs + s^2\right)\right]$$

[§2.4.1-2]. Va però notato come la semisomma[lxv] tra i casi ♣ e ♦ dia ancora il caso lineare: $\frac{1}{2}\{M^{r,s}_{♣}[l(y)]+M^{r,s}_{♦}[l(y)]\}=\frac{1}{2}l(0)(2-r-s)$.
Possiamo però riscrivere la **[§2.4.1-2]** mettendo in evidenza il centro t e la semiampiezza δ dell'intervallo, con $t=\frac{r+s}{2}$ **[§2.4.1-2.a]** e $\delta=t-r=s-t$[lxvi]**[§2.4.1-2.b]**:

$M^{t-\delta,t+\delta}[l(y)]=l(t)+\frac{l(0)k\delta^2}{3}$ **[§2.4.1-2 bis]**. Questo risultato non è del tutto intuitivo, perché avremmo potuto aspettarci semplicemente il valore centrale $l(t)$: che rimanga un residuo dell'ampiezza dell'intervallo prescelto si deve al fatto che la curva sia di secondo (e non di primo) grado in y[lxvii] (difatti nel caso De Moivre, che è lineare, l'influenza di δ sulla media sparisce). Naturalmente per $\delta=0$ la media dei sopravviventi equivarrà al valore puntuale di $l(t)$. Anche qui, la semisomma delle medie dei casi ♣ e ♦ dà la media del caso lineare – che corrisponde poi a $l_{DM}(t)$.
Il parametro k è invece positivamente correlato alla media dei sopravviventi nell'intervallo di riferimento, con effetto tanto maggiore quanto più ampio è quest'ultimo. Tale intervallo si trova quindi a temperare il vantaggio puntuale del caso quadri su quello fiori. Sarà infatti: $\frac{1}{2}\{M_{♦}^{t-\delta,t+\delta}[l(y)]-M_{♣}^{t-\delta,t+\delta}[l(y)]\}=l(0)\bar{h}\left[t(1-t)-\frac{\delta^2}{3}\right]$ **[§2.4.1-3]**.

Il valore della media generale lo troviamo per $t,d=\frac{1}{2}$; otteniamo così: $l(0)\frac{3-k}{6}$ **[§2.4.1-4]**. Per quanto riguarda questa media, non resta che indagare alcuni valori particolari di $M^{r,s}[l(y)]$[lxviii].

C'è però anche la possibilità di calcolare le medie non per età bensì rispetto a intervalli di k (di estremi v e w)[lxix].

$M^{v,w}[l(y;k)]=\frac{\int_v^w l(y;k)dk}{\int_v^w dk}=l(0)(1-y)\left(1-y\frac{v+w}{2}\right)$ **[§2.4.1-5]**, che non dipende dall'ampiezza dell'intervallo ma solo dal suo centro[lxx], che stavolta indichiamo con z (γ sarà la semiampiezza dell'intervallo); vale infatti: $M^{z-\gamma,z+\gamma}[l(y;k)]=l(0)(1-y)(1-zy)=l(y;z)$ **[§2.4.1-5a]**, che è una ritrascrizione della **[§2.0.6a]** con la sostituzione di z a k.

È possibile calcolare una media generale su y e su k, anche per subpopolazioni corrispondenti a determinati intervalli. Possiamo arrivarci facendo la media della **[§2.4.1-5a]** nell'intervallo $(t-\delta),(t+\delta)$, o viceversa facendo la media della **[§2.4.1-2 bis]** nell'intervallo $(z-\gamma),(z+\gamma)$.

In ogni caso avremo: $M^{[y\in(t-\delta,t+\delta);k\in(z-\gamma,z+\gamma)]}=l(t;z)+l(0)\frac{z\delta^2}{3}$ **[§2.4.1-6]**, che per l'intero campo di esistenza di k ed y dà come media generale un dantesco: $\overline{\overline{M}}=\frac{1}{2}$ **[§2.4.1-6.a]**, segno l'intera famiglia di leggi di mortalità delle quali ci stiamo occupando non è di per sé né favorevole né avversa alla sopravvivenza (come è intuitivo, prendiamo come unità di comparazione la legge più basilare che esista, la de Moivre).

§2.4.2 Ora e sempre resistenza

La media dei decessi per unità di tempo[lxxi], ha maggiore suggestività intuitiva: Petrioli, per analogia meccanica, la chiama "potenza media della mortalità"[lxxii].

La formula dovrebbe essere: $M^{r,s}[d(y)] = \frac{\int_r^s d(\upsilon)d\upsilon}{\int_r^s d\upsilon}$ **[§2.4.2-1]**, ma possiamo tranquillamente evitare l'integrazione reinterpretandola come: $M^{r,s}[d(y)] = \frac{l(r)-l(s)}{s-r}$ **[§2.4.2-1bis]**, che dà come risultato $M^{r,s}[d(y)] = l(0)[1+k(1-r-s)]$ **[§2.4.2-2]**. Se vediamo questo risultato in termini di *t* e *δ*, come nella **[§2.4.1-2 bis]**, scopriamo che il risultato è sempre pari a quello del punto centrale, a prescindere dall'ampiezza dell'intervallo[lxxiii]: $M^{t-\delta,t+\delta}[d(y)] = d(t)$ **[§2.4.2-2 bis]**.
C'è un corollario alla **[§2.4.2-2 bis]**. Partiamo dal dato che la media dei decessi per unità di tempo, se calcolata sull'intero arco di vita, è sempre uguale al totale della popolazione diviso la lunghezza massima vivibile[lxxiv] (lo si evince immediatamente dalla **[§2.4.2-1bis]**). Posto che l'ampiezza dell'intervallo non ha rilevanza sul risultato, vediamo allora che per qualsiasi *k* la media temporale dei decessi incentrata sull'età *y=½* (che riconferma il suo ruolo cruciale) dev'essere pari a quella del caso lineare, perché tale è il risultato se *δ=½*; questo è deducibile senza ricorrere alla **[§2.4.2-2 bis]**, che renderebbe ancora più evidente la conclusione se pensiamo che *d(½)* è uguale per tutti i *k* (si veda la **[§2.1-2]**).
Calcolare la media rispetto a *k* ci dà risultati simili a quelli trovati nel §2.4.1. Avremo infatti:

$$M^{v,w}[d(y;\bar{k})] = \frac{\int_v^w [k(1-2y)+1]dk}{\int_v^w dk} = l(0)\left[1+(1-2y)\frac{v+w}{2}\right] = l(0)(1+z-2zy)$$ **[§2.4.2-2]** che

ripropone la **[§2.1-2]**, con *z* al posto di *k*.
Sempre Petrioli[lxxv] propone la funzione di "resistenza alla mortalità", che ricaviamo nel nostro caso dalla **[§2.4.2-2]**:

$$\rho(y) = \frac{M^{y,1}[d(y)]}{M^{0,y}[d(y)]} = \frac{d\left(\frac{1+y}{2}\right)}{d\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{1-ky}{1+k(1-y)}$$ **[§2.4.2-3]**. L'andamento per età è calante sia nei casi

neri sia in quelli rossi, senza avere i massimi che si riscontrano nelle popolazioni reali[lxxvi]. Si noti che $\rho_{\clubsuit}(y)=[\rho_{\diamondsuit}(1-y)]^{-1}$ **[§2.4.2-3a]**, e viceversa.

§2.4.3 Media del tasso di mortalità
Anche in questo caso possiamo fare la media per un intervallo di *k*. Ricorrendo alla **[§2.1-8 bis]** avremo:

$$M^{v,w}[\mu(y;\bar{k})] = \frac{\int_v^w \left[\frac{1}{1-y}+\frac{k}{1-ky}\right]dk}{\int_v^w dk} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2(w-v)}\ln\frac{1-vy}{1-wy}$$ **[§2.4.3-1]**[lxxvii].

Quale funzione dei sopravviventi risulterà da tale tasso? Ricorriamo ancora alla **[§2.2-12]**, utilizzando come consueto υ come variabile d'integrazione[lxxviii]:

$l(y) = l(0)\, e^{\left[\ln\upsilon(1-\upsilon)+\frac{\ln(1-w\upsilon)-\ln(1-v\upsilon)}{\upsilon^2(w-v)}\right]_0^y} = l(0)\,(1-y)\cdot\sqrt[y(w-v)]{\frac{(1-vy)^{1-vy}}{(1-wy)^{1-wy}}}\cdot\frac{1}{e}$ **[§2.4.3-2]**.L'espressione tiene per $y = 0$, perché $\lim_{y\to 0}\sqrt[y(w-v)]{\frac{(1-wy)^{1-wy}}{(1-vy)^{1-vy}}} = e$ **[§2.4.3-2e]** (si tenga presente la **[§2.4.3-2c]**, e si faccia il limite dell'esponente ottenuto dalla **[§2.4.3-2e]** considerandola potenza del numero neperiano *e*).

Se vogliamo paragonare la **[§2.4.3-2]** alla funzione ottenuta per semisomma puntuale di parametri simmetrici (ovvero la **[§2.2-9]**), dobbiamo fare il caso di un intervallo centrato sul caso lineare.

Riscriviamo quindi la **[§2.4.3-2]**[lxxix] come $l(0)\,(1-y)\cdot\sqrt[2hy]{\frac{(1+hy)^{1+hy}}{(1-hy)^{1-hy}}}\cdot\frac{1}{e}$ **[§2.4.3-2a]** ed effettuiamo il raffronto.

La **[§2.4.3-2a]** sarà sempre superiore alla **[§2.2-9]**, salvo debitamente coincidere al limite per $h\to 0$[lxxx].

§2.5 La vita è bella perché varia

Possiamo a questo punto utilizzare le medie per calcolare le varianze; anche stavolta, possiamo limitarci a intervalli parziali. Si noti che in ogni caso *l(y,k)* dovrà passare da 1 a 0 nell'arco di tempo unitario (in termini di *y*): questo però può succedere con maggiore o minore dispersione intorno alla media.

§2.5.1 I sopravviventi

Il calcolo parte dalla formula[lxxxi]: $\frac{\int_{t-\delta}^{t-\delta}\{l(y)-M[l(y)]\}^2\,dy}{\int_{t-\delta}^{t-\delta}dy}$ **[§2.5.1-1]**, che dà il risultato abbastanza complesso $Var[l(y)] = l^2(0)\frac{\delta^2}{3}\left[4k^2t^2-4k(1+k)t+\frac{4}{15}k^2\delta^2+(1+k)^2\right]$ **[§2.5.1-1a]**. L'aspetto più appariscente è la scissione in due fattori della formula. Il primo dei due contiene il termine poco problematico $l^2(0)$, che serve a dare la proporzionalità[lxxxii] con la dimensione della popolazione; subito dopo però salta agli occhi il ruolo di δ, come intuitivo proporzionale alla varianza (più è ampio l'intervallo, più c'è occasione per variare)[lxxxiii], con la correzione della divisione per tre già esaminata alla nota lxvii. Il ruolo di δ non si ferma però qui, perché contribuisce a modulare più finemente la varianza nel secondo fattore, quello che appare in parentesi quadra nella **[§2.5.1-1a]** e che chiameremo $\Theta(k, t, \delta)$; l'apporto è anche qui sempre positivo, perché si lega sì a *k*, che può essere negativo, ma compare al quadrato. Si noti che per δ nullo, Θ equivarrebbe ad un quadrato; dalla **[§2.5.1-1a]** ricaviamo infatti: $\Theta_{\delta=0} = [2kt-(1+k)]^2$ **[§2.5.1-1a1]**.

Su Θ però influiscono anche *t* e *k*, in maniera più complessa. In quanto a *t*, basterà notare che possiamo riscriverne l'espressione mettendo in rilievo il rapporto con i sopravviventi[lxxxiv]. Sarà allora $\frac{\partial\Theta(k,t,\delta)}{\partial t} = 4k\frac{\partial l(t)}{\partial t}$ **[§2.5.1-1c]**. La derivata dei sopravviventi rispetto all'età non è mai positiva: resterà quindi da vedere se ci troviamo in un caso nero (*k* positivo) nel qual caso la varianza diminuirà al crescere di *t*, o viceversa in uno rosso.

Vediamo ora l'effetto di *k*: $\frac{\partial\Theta(t,k,\delta)}{\partial k}=2\left[\left(4t^2-4t+1+\frac{4}{15}\delta^2\right)k+(1-2t)\right]$ **[§2.5.1-1d]**, scrivibile anche mettendo in evidenza il ruolo dell'età centrale:
$\frac{\partial\Theta(t,k,\delta)}{\partial k}=2\left[k(1-2t)^2+(1-2t)+\frac{4}{15}k\delta^2\right]$ **[§2.5.1-1d bis]**. Dalla **[§2.5.1-1d]** ricaviamo i valori di *k* per i quali Θ cresce: di tale appassionante questione ci occuperemo nella scorrevole Appendice 2.
Naturalmente si può anche calcolare la varianza rispetto a *k* anziché *y*, così come avevamo fatto per le medie; difatti, per determinarla ricorriamo proprio alla **[§2.4.1-5a]**: *Var[l(y)]=*

$$\frac{\int_{z-\gamma}^{z+\gamma}\{l(k)-M[l(k)]\}^2dk}{\int_{z-\gamma}^{z+\gamma}dk}=l^2(0)\frac{\int_{z-\gamma}^{z+\gamma}[(y^2-y)(k-z)]^2dk}{2\gamma}$$ **[§2.5.1-2]**. Da qui otteniamo:

Var[l(y)]= $l^2(0)y^2(1-y)^2\frac{\gamma^2}{3}$ **[§2.5.1-2a]**; si noti il ricorrere del "3" al denominatore, legato al fatto che la varianza integra quantità al quadrato. Il fatto che le variabili appaiano tutte al quadrato rende semplice l'analisi dello scarto quadratico medio, che è della stessa dimensione dei sopravviventi; avremo quindi: $\sigma_{\{k;[z-\gamma,z+\gamma]\}}=l(0)y(1-y)\frac{\gamma}{\sqrt{3}}$ **[§2.5.1-3]**.

Come usuale, *l(0)* appare alla prima potenza – una conferma della comparabilità tra scarto quadratico medio e la variabile della quale si analizza la dispersione. Appare poi il prodotto tra età vissuta ed età residua; una conseguenza del fatto che alle età 0 ed 1 qualsiasi legge di sopravvivenza deve dare lo stesso risultato. Questo comprime quindi lo spazio per la dispersione ai due estremi per età della distribuzione; non è invece automatico che nell'età centrale la variabilità si faccia massima: qui è così, e più in generale il fattore *y(1-y)* indica una simmetria rispetto all'età centrale.
Va infine osservata la proporzionalità con l'ampiezza γ dell'intervallo considerato: si noti che non appare invece il centro *z* dell'intervallo; la dispersione è tuttavia maggiore vicino ai valori centrali del campo di esistenza di *k*: l'ampiezza massima di γ è pienamente spiegata solo per *z*=0 (appunto il valore centrale del CdE di *k*).
Per tutti i *k*[lxxxv] lo scarto quadratico medio vale:
$\sigma_{\{k;[z-\gamma,z+\gamma]\}}=\frac{l(0)}{\sqrt{3}}y(1-y)$ **[§2.5.1-3a]**, assumendo quindi tutti i valori tra 0 (età estreme) e $\frac{l(0)}{4\sqrt{3}}$ **[§2.5.1-3a.1]**.
Per raffrontare la dispersione secondo *k* a quella secondo *y* (potremmo ad esempio chiederci secondo quale variabile la dispersione è maggiore) effettuiamo la media secondo la variabile mancante.
Facciamo allora questa media sulla **[§2.5.1-2a]**, e otteniamo:

$$\sigma^2_{\{k;y\in[t-\delta,t+\delta]\}}=l^2(0)\frac{\gamma^2}{3}\frac{\int_{t-\delta}^{t+\delta}y^2(1-y)^2dy}{\int_{t-\delta}^{t+\delta}dy}$$ **[§2.5.1-2b]**, che dopo l'integrazione vale:

$$\sigma^2_{\{k;y\in[t-\delta,t+\delta]\}}=l^2(0)\frac{\gamma^2}{3}\left[t^4-2t^3+\left(1+2\delta^2t^2-2\delta^2t+\frac{\delta^2}{3}+\frac{\delta^4}{5}\right)\right]$$ **[§2.5.1-2b.1]**, che su tutto l'arco

di y equivale a: $\sigma^2_{\{k;y\in[0,1]\}}=l^2(0)\dfrac{\gamma^2}{90}$ **[§2.5.1-2b.2]**, e a $\sigma^2_{k\in\{[-1,1];y\in[0,1]\}}=\dfrac{l^2(0)}{90}$ **[§2.5.1-2b.3]** anche per tutti i valori di k.
Dobbiamo ora calcolare la media della **[§2.5.1-1a]** secondo k; otteniamo quindi:

$$\sigma^2_{\{y;k\in[z-\gamma,z+\gamma]\}}=l^2(0)\frac{\delta^2}{3}\frac{\int_{z-\gamma}^{z+\gamma}\left[k^2\left(4t^2-4t+\frac{4}{15}\delta^2+1\right)+2k(1-2t)+1\right]dk}{\int_{z-\gamma}^{z+\gamma}dk}$$

, che a sua volta come risultato dà $\sigma^2_{\{y;k\in[z-\gamma,z+\gamma]\}}=l^2(0)\dfrac{\delta^2}{3}\left[\left(z^2+\dfrac{\gamma^2}{3}\right)\left(4t^2-4t+\dfrac{4}{15}\delta^2+1\right)+2z(1-2t)+1\right]$ **[§2.5.1-1a.1]** nell'intervallo, e $l^2(0)\dfrac{\delta^2}{3}\left[\dfrac{1}{3}\left(4t^2-4t+\dfrac{4}{15}\delta^2+1\right)+1\right]$ **[§2.5.1-1a.2]** per tutti i k. Calcolando anche su tutti gli y otteniamo infine $\dfrac{23}{270}l^2(0)$, valore che va raffrontato con $\dfrac{l^2(0)}{48}$, quadrato della **[§2.5.1-3a.1]**, che è inferiore in valore.
Infine possiamo calcolare la varianza secondo ambedue i caratteri, k e y, per la quale ricorriamo alla media generale **[§2.4.1-6]**; possiamo seguire la definizione, partendo da

$$\frac{l^2(0)\int_{z-\gamma}^{z+\gamma}\int_{t+\delta}^{t-\delta}\left\{\left[ky^2-(1+k)y+1\right]-\left[zt^2-(1+z)t+1+\frac{z\delta^2}{3}\right]\right\}^2dydk}{4\gamma\delta}$$

[§2.5.1-4]; oppure anche calcolare il momento secondo[lxxxvi] e sottrarre il quadrato della media. Il risultato finale sarà:

$$\frac{l^2(0)}{3}\left[\gamma^2t^4-2\gamma^2t^3+\left(4z^2\delta^2+2\gamma^2\delta^2+\gamma^2\right)t^2-2\delta^2\left(2z^2\delta^2+\gamma^2+2z\right)t+\delta^2\left(\frac{4}{15}z^2\delta^2+\frac{\gamma^2\delta^2}{5}+z^2+\frac{\gamma^2}{3}+2z+1\right)\right]$$

[§2.5.1-4.2], che su tutto l'intervallo vale $\dfrac{17}{180}l^2(0)$. Vale la pena rilevare alcune caratteristiche, alcune attendibili, altre meno:

1. la varianza è proporzionale al quadrato del contingente iniziale (questo risultato era scontato);
2. come nelle varianze secondo un solo carattere, è immediato raccogliere 3 al denominatore; conseguenza questa delle medie dei quadrati imposti dalle formule della varianza; il 5 al denominatore deriva invece dai termini alla quarta potenza (quadrati di quadrati della formula originale dei sopravviventi);
3. tutti i termini contengono almeno uno scostamento;
4. come atteso, tali scostamenti appaiono elevati ad una potenza pari[lxxxvii];
5. le potenze dell'età (che appare sotto forma di età media dell'intervallo considerato, t), inoltre, compaiono a segni alterni, positive quelle pari e negative quelle dispari[lxxxviii]; si noti come questo sia quanto verifica sia nelle varianze precedenti, sia nelle medie sia infine nella formula dei sopravviventi.

§2.5.2 I decessi

Dalla formula $Var^{r,s}[d(y)] = \frac{\int_r^s \{d(\upsilon) - M^{r,s}[d(\upsilon)]\}^2 d\upsilon}{\int_r^s d\upsilon}$ **[§2.5.2-1]** otteniamo:

$Var^{r,s}[d(y)] = \frac{[l(0)k(s-r)]^2}{3}$ **[§2.5.2-2]**, che possiamo riscrivere come:

$Var^{t-\delta,t+\delta}[d(y)] = \frac{4[l(0)k\delta]^2}{3}$ **[§2.5.2-2]**. Scopriamo insomma che la varianza dei decessi, specularmente a quanto succedeva per le medie (si veda la **[§2.4.2-2 bis]**), dipende esclusivamente dall'ampiezza dell'intervallo considerato e non dalla sua centratura. Dato che *k* appare al quadrato, qui i casi ♣ e ♦ danno lo stesso risultato per un $\bar{h}$ prefissato (in altre parole, ciò che conta è il modulo di *k* e non il suo segno).

§2.6 Una questione di concentrazione?

L'indice di concentrazione si calcola correttamente sulle caratteristiche trasferibili, quali – per antonomasia – il reddito. Il nostro caso è quindi improprio: tanto più, se oltretutto il calcolo viene condotto, come sarebbe immediato, per *y*. Perdipiù, dobbiamo trovare la quantità da cumulare, ed occorre sia crescente[lxxxix] rispetto alla variabile lungo la quale disponiamo gli individui. Abbiamo diverse possibilità: tra le quantità monotone – sia rispetto ad *y* che a *k* – ci sono le quantità più elementari *l(y)* o la speranza di vita. Queste vanno però ordinate rispetto ad *(1-y)* e *-k*, altrimenti sono non crescenti; possiamo altrimenti ricorrere ai decessi cumulati rispetto all'età, che sono già non decrescenti rispetto sia ad *y* sia a *k*.
Ci limitiamo a quest'ultimo caso[xc] e cominciamo con il computo secondo la *y*. Questo non perché il calcolo non richieda l'inversione della variabile di allineamento, bensì perché dà risultati abbastanza agili; l'interpretazione è però piuttosto oscura concettualmente, perché l'equidistribuzione corrisponde alla mancanza di mortalità, che lascerebbe inalterati i *D(y)* col procedere dell'età. Vi è inoltre il fatto che l'utilizzo ideale dell'indice di concentrazione sia su distribuzioni discrete.
È una piccola consolazione, quindi, che la formula finale sia di elegante semplicità:
$R_y^{D(y)} = \frac{1}{3+k}$ **[§2.6-1]**[xci]; se la calcoliamo per sub-intervalli, come abbiamo fatto per media e varianza, otteniamo l'espressione più generale
$R_{y\in[r,s]}^{D(y)} = (s-r)\frac{(1+k)-k(s+r)}{3(1+k)(s+r)-2k(s^2+rs+r^2)}$ **[§2.6-2]**[xcii]; tradotta in termini di centro *t* e semi-ampiezza δ dell'intervallo, diventa: $R_{y\in[t-\delta,t+\delta]}^{D(y)} = \delta\frac{1+k-2kt}{3(1+k)t-k(3t^2+\delta^2)}$ **[§2.6-2a]**[xciii], risistemabile mettendo in evidenza il ruolo dell'età centrale: $R_{y\in[t-\delta,t+\delta]}^{D(y)} = \delta\frac{1+k(1-2t)}{3(1+k)t-k(3t^2+\delta^2)}$ **[§2.6-2a1]**.
l'altra modalità è quella di condurre il calcolo secondo *k*; otteniamo:
$R_{k\in[v,w]}^{D(y)} = \frac{1-y}{3}\frac{w-v}{2+(1-y)(v+w)}$ **[§2.6-3]**, che in termini di centro e ampiezza dell'intervallo vale $R_{k\in[z-\gamma,z+\gamma]}^{D(y)} = \frac{1-y}{3}\cdot\frac{\gamma}{1+z(1-y)}$ **[§2.6-3a]**; su tutta l'estensione di *k* abbiamo:

$R^{D(y)}_{k\in[v,w]} = \frac{1-y}{3(3-y)}$ **[§2.6-4]**: la concentrazione scende con l'aumentare di *y*, e va dal massimo di $\frac{1}{9}$ alla nascita sino a 0[xciv].
Gli indici di concentrazione sono stati messi a punto soprattutto per studiare l'equità della distribuzione delle risorse (tipicamente il reddito, come dicevamo). Nel nostro caso abbiamo un'alternativa assai semplice dal punto di vista del calcolo: ce ne occupiamo nel prossimo paragrafo.

§2.7 Mors tua, vita mea

L'alternativa di cui parlavamo è sovrapporre, rovesciati, i grafici dei sopravviventi di due popolazioni caratterizzate dai parametri *k* e –*k*: già sappiamo che devono combaciare (si veda l'inizio del §2.1). A questo punto, come si accennava nel §2.1, possiamo immaginare che il rettangolo risultante sia il totale dello spazio di vita, e che due popolazioni se lo debbano dividere tracciando il nostro arco di parabola tra i due vertici contrapposti (si veda la *Figura 1 - Due popolazioni sovrapposte*). Se esistesse una sola popolazione – vale a dire, se all'altra fosse assegnato uno spazio nullo – il totale di vita sarebbe massimo (ovvero unitario) per ogni membro. Una via per valutare quanto l'allontanarsi di *k* dallo zero (caso lineare, perfettamente equo) induce sperequazione tra le due popolazioni è calcolare quale proporzione di spazio di vita vada alla prima delle due per ogni barra verticale di ampiezza *r-s*. In formula:

$\Xi(k;r,s) = \frac{\int_r^s l(k;y)dy}{l(0)(s-r)}$ **[§2.7-1]**. Il risultato è: $\Xi(k;r,s) = \frac{k}{3}(r^2+s^2+rs) - \frac{1+k}{2}(r+s) + 1$ **[§2.7-1a],**
meglio traducibile in termini di centro e semi-ampiezza dell'intervallo:
$\Xi(k;t,\delta) = kt^2 - (1+k)t + 1 + \frac{k}{3}\delta^2 = \frac{l(k;t)}{l(0)} + \frac{k}{3}\delta^2$ **[§2.7-1a.bis]**, che vale invece, come ovvio,
$\frac{l(k;t)}{l(0)}$ **[§2.7-1b.bis]** nei casi puntuali; l'estendersi dell'intervallo di riferimento tende quindi ad attenuare la sproporzione[xcv] tra ♣ e ♦. Bisogna però tenere conto del fatto che la sproporzione non si deve solo a *k*: poiché confrontiamo i due settori di una barra verticale (la cui età sarà dunque simmetrica rispetto al valore ½), ci sarà anche un effetto anagrafico in favore della popolazione più giovane[xcvi].
La valutazione più interessante è quindi quella estesa a tutto l'arco di vita, che neutralizza questa distorsione: $\frac{k}{4} - \frac{1+k}{2} + 1 + \frac{k}{12} = \frac{1}{2} - \frac{k}{6}$ **[§2.7-1c]**, che equivale al rapporto $\frac{T(0;k)}{l(0)(1-0)} = e(0;k)$ **[§2.7-1c.bis]**[xcvii] (l'equità è a ½, corrispondente alla De Moivre). I casi più estremi saranno naturalmente quelli con $\bar{h}$ massimo, rispettivamente Ξ(♠) $= \frac{1}{3}$ e Ξ(♥)$= \frac{2}{3}$; il massimo squilibrio corrisponde quindi ad uno spazio di vita in ragione di 1:2.
Abbiamo anche la possibilità di misurare la sperequazione confrontando i coetanei per *k* opposti (uguali per modulo *h*): $\Theta(h,t,\delta) = \frac{\int_{t-\delta}^{t+\delta} l(y;h)dy}{\int_{t-\delta}^{t+\delta} l(y;-h)dy} = \frac{3-3(1+h)t+(3t^2+\delta^2)h}{3-3(1-h)t-(3t^2+\delta^2)h}$ **[§2.7-3]**, che su tutto l'arco di vita (*t* e δ pari a ½; si tratta evidentemente di uno stretto parente della **[§2.7-1c]**) vale $\frac{3-h}{3+h}$ **[§2.7-3a]**; come ovvio, per δ nullo si riduce invece a $\frac{l(y;h)}{l(y;-h)}$ **[§2.7-3a]**.

xxi La nostra furia iconoclasta può giungere fino ad eliminare anche l'innocuo, benché ingombrante, *l(0)*, ottenendo: $p(y) = (1-y)(1-ky)$ **[§2.0-7]**; basterà infatti forzare *l(0)* = 1, oppure interpretare *p(y)* come *p(0;y)*, la probabilità per chi nasce di essere ancora in vita all'età *y*.

xxii Conformemente alle nostre aspettative, più l'età è giovanile più sopravvivente si conteranno. Si noti che questo secondo fattore corrisponde alla De Moivre.

xxiii In quanto non riesce in ogni caso a rovesciare la tendenza di *l(y)* al decremento al trascorrere dell'età (è questa una delle ipotesi di base, per l'esattezza la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** dell'§1) pur potendo, per *k* negativo, innalzarsi con questa.

xxiv Infatti è: $l(0)(1-y)(1+y) + l(0)[1-(1-y)][1-(1-y)] = l(0)[(1-y^2)+y^2]$ **[§2.1-1.1a]**.

xxv Diagramma usato dagli economisti, nel quale le origini degli assi cartesiani (sopravviventi in ordinata ed età in ascissa) occupano i vertici contrapposti di un rettangolo, che viene diviso da una sola linea curva.

xxvi La curva tracciata ha valore solo esemplificativo. Si noti che quella azzurra è ricavata dal ramo destro di una parabola con coefficiente *a* negativo, la gialla all'inverso dal ramo sinistro di una parabola con coefficiente *a* positivo (si veda l'inizio dell'§1).

xxvii Un valore di *d(y)* inferiore ad *l(0)* indica pertanto una velocità di eliminazione insufficiente, qualora rimanesse costante, allo smaltimento del contingente iniziale entro l'età omega: dobbiamo allora aspettarci un "recupero" ad altre età (ragionamento inverso per un valore dei decessi superiore al contingente iniziale). Vedendo la questione in altro modo, fermiamo l'attenzione sul fatto che la somma dei decessi a tutte le età deve eguagliare i nati: $\int_0^1 d(y)dy = l(0)$ **[§2.1-3]**; questa può essere intesa anche come l'espressione della media dei decessi per età – dovremmo infatti avere $\int_0^1 dy = 1$ al denominatore. Il risultato in termini di *x* sarebbe invece: $\frac{\int_0^\omega d(x)dx}{\int_0^\omega dx} = \frac{l(0)}{\omega}$ **[§2.1-3a]** (per l'appunto, il valore della De Moivre).

xxviii Si veda la **[§2.1-2]**.

xxix È infatti: ½ [$d_{♠}(y)$ +$d_{♥}(y)$] = *l(0)* **[§2.1-5]**.

xxx Interessante il fatto che μ si scinda in due addendi, dei quali il primo dipende solo dall'età (ed è, come ci aspettiamo crescente con essa: per la precisione, inversamente proporzionale all'età residua massima).

xxxi Si vedano le **[§2.1-9]**, in particolare la **[§2.1-9c]**.

xxxii Con l'eccezione delle primissime età, questo il caso più frequente nelle popolazioni reali (in particolare in quelle storiche).

xxxiii Questo risultato non è di immediata lettura. Si consideri però che la**[§2.1-9b]** cresce con *k*; questo si può provare – fossimo pignoli – derivandola: $\frac{\partial}{\partial k}\left\{2\left[\frac{1}{(1-y)^3}+\frac{k^3}{(1-ky)^3}\right]\right\} = \frac{6k^2}{(1-ky)^4}$ **[§2.1-9b.1]**. Il caso più sfavorevole (alla positività della **[§2.1-9b]** è pertanto *k*=-1. Ma persino in questo caso – che è quello ♥, il migliore per la sopravvivenza – la **[§2.1-9b]** varrà: $2\left[\frac{1}{(1-y)^3}-\frac{1}{(1+y)^3}\right] \geq 0$ **[§2.1-9b.2]** (si annulla solo per *y*=0); a maggior ragione il risultato della **[§2.1-9b]** sarà positivo per gli altri valori di *k*.

xxxiv Questa riprova del ruolo sfavorevole di *k* (e, nell'§1, di *a*) rispetto alla sopravvivenza è particolarmente evidente, ma non isolata. Altrove, ad esempio nella **[§2.1-6]**, tale ruolo era presente sebbene meno appariscente – alti valori di *k* concentravano i decessi nella prima metà dell'arco di vita disponibile.

xxxv Per l'età *y* = 1 in realtà il primo fattore è nullo in tutti e tre i casi; la considerazione sul fattore di correzione vale quindi al limite. Questa considerazione potrebbe applicarsi più volte anche nelle prossime pagine.

xxxvi Se non per le età 0 ed 1: questo però è ovvio per qualsiasi funzione di sopravvivenza, che deve valere rispettivamente *l(0)* e 0 (cfr. le ipotesi iniziali elencate all'§1, segnatamente la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** e la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**).

xxxvii Si veda la **[§2.2-6]**.

xxxviii Più in generale, il caso ♥ tende a generare risultati più complessi di quello ♠.

xxxix Userò ♣ e ♦ in due accezioni: l'una, più specifica, per designare due funzioni identiche nel modulo di *k*, ma opposte nel suo segno; l'altra, per estensione, per designare una funzione di sopravvivenza caratterizzata da *k* negativo (♦) o positivo (♣). Quando esigenze di chiarezza lo consiglieranno, userò il simbolo *h* soprassegnato ($\bar{h}$) per la prima accezione.

[xl] Il fatto che in certe età (ovvero per $y>½$) i decessi totali siano superiori nel caso ♦ rispetto a quello ♣ non significa che la mortalità vi sia più forte, bensì semplicemente che il contingente iniziale va eliminato entro l'ultima età utile: se non lo si fa all'inizio (cosa buona per la sopravvivenza) bisognerà farlo alla fine. La forza della mortalità va invece giudicata dal tasso di mortalità $\mu(y)$.

[xli] Possiamo quindi formalizzarne la generalizzazione: $l_{♣}(y)+l_{♦}(1-y) = l(0)$ **[§2.2-3]**. Fiori e quadri vanno qui intesi nel senso ristretto (cfr. nota xxxix), con riferimento quindi ad uno specifico $\bar{h}$ comune ai due casi.

[xlii] È infatti $\frac{1-y}{6}\left(2+\frac{1-\bar{h}^2 y}{1-\bar{h}^2 y^2}\right) \le \frac{1-y}{2} \Rightarrow \frac{1-\bar{h}^2 y}{1-\bar{h}^2 y^2} \le 1$ **[§2.2-6a]**.

[xliii] Una conseguenza del fatto che con l'avvicinarsi dell'età massima diminuiscono le possibilità di differenziazione tra le funzioni di sopravvivenza.

[xliv] Scegliendo un $\bar{h}$ e sorteggiandone l'assegnazione del segno col 50% probabilità.

[xlv] La **[§2.2-4]** vale infatti: $½[\mu_{♣}(y)+ \mu_{♦}(y)] = \frac{1}{1-y}+\frac{\bar{h}^2 y}{1-\bar{h}^2 y^2}$ **[§2.2-4 bis]**. Non è quindi mai migliore del caso lineare (si eguagliano solo alla nascita) ed equivale ad un tasso di mortalità di tipo ♣, esattamente quello di valore $\mu(y;\, k = \bar{h}^2 y)$; naturalmente si tratterà di un ♣ attenuato rispetto all'originale: *h* è compreso tra zero ed uno, quindi al quadrato sarà comunque inferiore, a parte i casi estremi ♠ e ♥ per i quali vi è uguaglianza. Diverso il ragionamento se ci si sposta dal tasso istantaneo di morte alla speranza di vita. Avremo allora: $e_{DM}(y) - ½[e_{♣}(y)+ e_{♦}(y)] =$

$$\frac{1-y}{6}\left[3-\left(2+\frac{1-\bar{h}^2 y}{1-\bar{h}^2 y^2}\right)\right] = \frac{1-y}{6}\left(1-\frac{1-\bar{h}^2 y}{1-\bar{h}^2 y^2}\right) = \frac{(1-y)^2}{6}\left(\frac{\bar{h}^2 y}{1-\bar{h}^2 y^2}\right)$$ **[§2.2-6.1]**. Più agevole il raffronto con la proporzione in luogo della differenza assoluta: $[e_{♣}(y)+ e_{♦}(y)] \;/\; [2\, e_{DM}(y)] =$

$$\frac{1}{3}\left(2+\frac{1-\bar{h}^2 y}{1-\bar{h}^2 y^2}\right) = \frac{3-2\bar{h}^2 y^2-\bar{h}^2 y}{3\left(1-\bar{h}^2 y^2\right)} = 1-\bar{h}^2 y\frac{1-y}{3\left(1-\bar{h}^2 y^2\right)}$$ **[§2.2-6.2]**.

[xlvi] Ricorrendo alla **[§2.2-8]** e alla **[§2.2-4 bis]** avremo: $l[\mu(y;\, \bar{h}^2 y)]$

$$= e^{-\int_0^y\left(\frac{1}{1-\upsilon}+\frac{\bar{h}^2\upsilon}{1-\bar{h}^2\upsilon^2}\right)d\upsilon} = e^{\left[\ln(1-\upsilon)+\frac{1}{2}\ln\left(1-\bar{h}^2\upsilon^2\right)\right]_0^y} = e^{\ln\left[(1-y)\sqrt{1-\bar{h}^2 \upsilon^2}\right]}$$ **[§2.2-9a]**.

[xlvii] Si noti che la **[§2.2-9]** non fa parte della famiglia di funzioni di sopravvivenza paraboliche, pur derivandone; vi è tuttavia coincidenza con la De Moivre per $h=0$.

[xlviii] Ricordo che in demografia è: $l(x)= l(0)e^{-\int_0^x \mu(\xi)d\xi}$ **[§2.2-12]**.

[xlix] Sarà quindi $0\le g\le 1$.

[l] Il caso h=0 è ovviamente escluso perché coincide con la De Moivre.

[li] Da: $(1+h)^2-4hg \ge 0$ **[§2.3-2ba]** ricaviamo infatti: $h^2+(2-4g)h+1\ge 0$ **[§2.3-2bb]**; anche qui dovremmo rispettare alcune condizioni su *h*, che sono del tutto analoghe a quelle B e C imposte su *y*. Un determinante negativo ci andrebbe invece benissimo, visto che si tratta di una disequazione di secondo grado del tipo "maggiore di zero" e con primo coefficiente positivo: ed è proprio quello che ci capita, dato che il determinante vale: $16g^2-16g=16g(g-1)$ **[§2.3-2bc]**, mai positivo nelle nostre ipotesi (cfr. nota xlix). Del resto bastava un'occhiata alla **[§2.3-2bb]** per vedere che il polinomio in *h* non può essere negativo dato il CdE di cui alla nota xlix: rispetto a *g* tocca infatti il minimo per $g=1$, valore in corrispondenza del quale la **[§2.3-2bb]** si riduce a: $(h-1)^2\ge 0$ **[§2.3-2bd]**.

[lii] Contraddistinta dal segno positivo davanti al radicale nel **[§2.3-2b]**.

[liii] Si tratta della **[§2.3-1ba]**, rinumerata per questioni formali. C'è però un'importante differenza: prima del radicale appare solo il segno meno, contrariamente a quanto può apparire dall'analisi precedente. In quella, però, il segno meno era stato scorporato dal denominatore, espresso in termini di *h*. Qui invece il *k* lo incorpora.

liv Come ci aspettiamo, questa età è negativamente correlata ad *h*:
$\frac{\partial y^g_{fiori}}{dh} = \frac{h(h+2g-1)-\sqrt{(1-h)^2+4gh}}{2h^2\sqrt{(1-h)^2+4gh}} \le 0$ **[§2.3-1b.1]**. La verifica si concentra sul numeratore, per il quale abbiamo: $h(h-1+2g) \le (1-h)-2g \le \sqrt{(1-h)^2+4gh}$ **[§2.3-1b.1a]**; basterà poi elevare al quadrato gli ultimi due membri.

lv Ancora secondo le previsioni, l'età è stavolta positivamente correlata ad *h*:
$\frac{\partial y^g_{quadri}}{dh} = \frac{h(h+1-2g)-\sqrt{(1+h)^2-4gh}}{2h^2\sqrt{(1+h)^2-4gh}} \le 0$ **[§2.3-1e.1]**. Da qui arriviamo a:
$h(h+1-2g) \le (1+h)-2g \le \sqrt{(1+h)^2-4gh}$ **[§2.3-1e.1a]**.

lvi È sufficiente prendere in considerazione la **[§2.3-6a]**, derivandola rispetto a *g*:
$\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{2}+\frac{1\pm\sqrt{(1-k)^2+4gk}}{2k}\right) = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1-k)^2+4gk}}$ **[§2.3-6a1]**,

lvii Se non nel caso della mediana, tralasciando quelli degeneri (*g* nullo od unitario); per *g*= ½ vale infatti ½.

lviii La prima condizione porta alla disuguaglianza $\sqrt{(1-h)^2+4gh} \ge 2g-(1-h)$ **[§2.3-9a]**. La seconda, quasi identica, a: $\sqrt{(1-h)^2+4gh} \ge -[2g-(1-h)]$ **[§2.3-9b]**. Ambedue le disuguaglianze sono corrette nei limiti dei parametri *g* ed *h*, in quanto il radicale (che resta invariato, ed non è mai negativo) non è mai inferiore in modulo al secondo membro, che muta solo di segno nei due casi. Quadrando (servirà solo quando il secondo membro è positivo) e confrontando abbiamo infatti: $(1-h)^2+4gh \ge 4g^2+(1-h)^2-4g(1-h) \Rightarrow g-1 \le 0$ **[§2.3-9ba]**.

lix È questo anche il massimo valore di **[§2.3-10a]**. Se infatti calcoliamo il punto di annullamento della derivata rispetto a *g* della **[§2.3-10a]**, otteniamo: $\frac{1}{\sqrt{(1-h)^2+4gh}} = \frac{1}{\sqrt{(1+h)^2-4gh}}$ **[§2.3-10aa]**, che con diversi passaggi porta alla soluzione *g* = ½ **[§2.3-10aa.1]**.

lx Si noti che in questo caso particolare il rapporto equivale alla differenza (abbiamo pertanto **[§2.3-10.b1] = [§2.3-11.b1]**).

lxi In questo senso anche Livi Bacci, p.130, e la voce *Tavola di mortalità* in WIKIPEDIA.

lxii Dal punto di vista dell'aggregato (popolazione o generazione) il modello dà valori certi: non si tratta quindi di valori attesi, bensì di medie descrittive; lo stesso varrà quando misureremo la dispersione. È comunque vero che espressioni come "probabilità di morte" o "probabilità di sopravvivenza" mantengono invece il loro valore stocastico, perché l'ottica è qui quella del singolo, in competizione con gli altri per entrare (o non entrare) in un predeterminato ammontare di decessi e – chiamiamole così – sopravvivenze.

lxiii Per calcolare la media occorre una distribuzione di probabilità; qui e nel seguito facciamo l'ovvia ipotesi dell'uniformità: tutti gli *y* e tutti i *k* entrano con lo stesso peso nel calcolo di media e varianza (anche se naturalmente i sopravviventi *l(y;k)* assumono valori differenti.

lxiv In generale, *T(x)* rappresenta la somma degli anni da vivere per l'insieme dei sopravviventi *l(x)*, ovvero la retrocumulata $T(x) = \int_x^{\omega} l(\xi)d\xi$; nel nostro caso vale $T(y) = \frac{l(0)}{6}(1-y)^2(3-k-2ky)$ **[§2.4.1-1a]**. La speranza di vita all'età *x* è la quota individuale del tempo complessivo *T(x)*, ed è quindi per definizione data dal rapporto
$e(x) = \frac{T(x)}{l(x)}$ **[§2.4.1-1b]**.

lxv Evito qui il termine "media" per chiarezza, giacché stiamo studiando il comportamento di medie.

lxvi Oltre all'ipotesi $\delta \ge 0$, dovrà naturalmente essere sia $(t-\delta)\ge 0$ sia $(t+\delta)\le 1$: questo implica che in ogni caso debba essere $\delta \le ½$.

lxvii È più semplice rendercene conto partendo dalla semisomma puntuale. Avremo: $½[l(t-\delta)+ l(t+\delta)] = l(0)[k(t^2+\delta^2)-(1+k)t+1] = l(t)+l(0)k\,\delta^2$ **[§2.4.1-2 bis-a]**. Questo succede perché $+\delta$ e $-\delta$ non si elidono nella somma quando elevati al quadrato (mentre si elidono i doppi prodotti): infatti la semisomma dei quadrati di due quantità non equivale al quadrato della media, bensì al quadrato della media più il quadrato della semiampiezza dell'intervallo tra i due termini; nei simboli fin qui usati: $(t-\delta)^2+(t+\delta)^2 = t^2+\delta^2$ **[§2.4.1-2 bis-b]**. Resta da vedere perché δ^2 sia diviso per tre nella **[§2.4.1-2**

bis]; si tratta di un altro effetto dell'elevazione al quadrato. Nella semisomma **[§2.4.1-2 bis-a]** abbiamo preso gli estremi dell'intervallo: se aggiungiamo i termini intermedi, la media si avvicinerà al valore centrale *l(t)*, perché i residui al quadrato saranno sempre più piccoli. Proviamo infatti a fare la media delle semisomme puntuali per tutti i possibili valori di δ nell'intervallo *(t-δ),(t+δ)*; dovremo allora calcolare: $\frac{\int_0^\delta \left[l(t)+k\chi^2\right]d\chi}{\int_0^\delta d\chi}$ **[§2.4.1-2 bis-c]**, che come risultato dà proprio la **[§2.4.1-2 bis]**, che abbiamo così ottenuto con una sorta di metodo a due stadi. Il 3 al denominatore compare perché facciamo la media di una variabile al quadrato, che si integra dividendo per tre il valore al cubo (la divisione con il denominatore fa poi retrocedere di nuovo a 2 il valore dell'esponente).

[lxviii] Ecco qualche risultato interessante, a cominciare da quello relativo ad una fascia di età simmetricamente centrata sull'età ½:

r	s	t	δ	Mr,s [l(y)], Mt-δ,t+δ [l(y)]	Note
ε	1- ε	½	½- ε	$l(0)\frac{3-[1-2\varepsilon(1-\varepsilon)]k}{6}$	Per k positivo diminuisce con l'ampliarsi dell'intervallo, viceversa nel caso ♦. È infatti: $\frac{\partial E(\varepsilon,k)}{\partial\varepsilon}=l(0)\frac{k}{3}(1-2\varepsilon)$
0	ζ	ζ/2	ζ/2	$l(0)\left(k\frac{\zeta^2}{3}-\frac{1+k}{2}\zeta+1\right)=\frac{4l\left(\frac{\zeta}{2}\right)+l(\zeta)+1}{6}$	
ζ	1	(1+ζ)/2	(1-ζ)/2	$\frac{l(0)}{6}(1-\zeta)[3-k(1+2\zeta)]$	
0	1	½	½	$l(0)\frac{3-k}{6}$	Il valore più interessante, perché corrisponde alla media generale
¼	¾	½	¼	$l(0)\frac{6-\frac{11}{4}k}{12}$	
0	½	¼	¼	$l(0)\frac{9-2k}{12}$	
½	1	¾	¼	$l(0)\frac{3-2k}{12}$	

[lxix] Quando il centro dell'intervallo di *k* considerato (che indicherò con *t*) sia pari a zero, si tratta di un'estensione delle semisomme di parametri simmetrici che abbiamo operato nel §2.3.

[lxx] Infatti *l(y,k)* è di primo grado rispetto a *k*.

[lxxi] Individuale, perché la trattazione è per età; annuale nel caso di *x*, in termini invece di frazione di vita massima teorica nella nostra analisi basata su *y*.

[lxxii] Cfr. Petrioli Berti, p.14.

[lxxiii] Risultato atteso, dal momento che i decessi sono una funzione di primo grado dell'età.

[lxxiv] Che resta però invisibile nel caso *y*, in quanto unitaria. Si osservi che il risultato del quale stiamo parlando vale invece per la De Moivre su qualsiasi arco temporale.

[lxxv]Cfr. nota lxxii.

[lxxvi] Cfr. Petrioli e Berti.

[lxxvii] Si ricordi che, ponendo uguale a zero la costante di integrazione, è: $\int\frac{k}{1-ky}dk=-\frac{k}{y}-\frac{\ln(1-ky)}{y^2}$ **[§2.4.3-1a]**.

[lxxviii] Il risultato non è affatto ovvio, per via delle difficoltà di calcolo per il valore υ=0. Si tenga presente allora che è (non indico la costante di integrazione): $\int \frac{\ln(1-w\upsilon)}{\upsilon^2} d\upsilon = \frac{w\upsilon - 1}{\upsilon} \ln(1-w\upsilon) - w\ln(\upsilon)$ **[§2.4.3-2a]**.

Arriviamo così a: *l(y)=l(0).* $e^{\left\{\ln(1-\upsilon)+\ln\upsilon+\frac{1}{w-v}\left[\frac{1-v\upsilon}{\upsilon}\ln(1-v\upsilon)+v\ln(\upsilon)-\frac{1-w\upsilon}{\upsilon}\ln(1-w\upsilon)-w\ln(\upsilon)\right]\right\}_0^y}$ **[§2.4.3-2b]**.

Inoltre $\lim_{\upsilon \to 0} \frac{\ln(1-w\upsilon)}{\upsilon} = -w$ **[§2.4.3-2c]** (ci si può arrivare sviluppando in Mc Laurin), e si noti anche che i tre ln(υ) si elidono a vicenda; si arriva allora a *l(y)=l(0).* $e^{\ln(1-y)+\frac{1}{w-v}\left[\frac{wy-1}{y}\ln(1-wy)-\frac{vy-1}{y}\ln(1-vy)-w+v\right]}$ **[§2.4.3-2d]**.

[lxxix] Ponendo quindi *w*=-*v*= $\bar{h}$. Pertanto, con $\bar{h}$ indichiamo ora gli estremi di k presi in considerazione nel costruire la media nella **[§2.4.3-1]**, e quindi nella **[§2.4.3-2]**.

[lxxx] Semplificando subito per *l(0)(1-y)* perveniamo facilmente a $\sqrt[2\bar{h}y]{\frac{(1+\bar{h}y)^{1+\bar{h}y}}{(1-\bar{h}y)^{1-\bar{h}y}}} \cdot \frac{1}{e} > \sqrt{1-\bar{h}^2 y^2}$ **[§2.4.3-3a]**.

Conviene a questo punto comparare i logaritmi:

$\frac{(1+\bar{h}y)\ln(1+\bar{h}y)-(1-\bar{h}y)\ln(1-\bar{h}y)}{2hy} - 1 > \frac{1}{2}\ln(1-h^2y^2)$ **[§2.4.3-3b]**. Tenendo conto che $\ln(1-h^2y^2) = \ln(1+\bar{h}y) + \ln(1-\bar{h}y)$ **[§2.4.3-3c]**, arriviamo a: $\frac{\ln(1+\bar{h}y)-\ln(1-\bar{h}y)}{hy} \geq 2$ **[§2.4.3-3d]**. Il segno di uguale vale per *h→0* oppure *y→0*, che ci porta a un bel *2=2*: si noti che nelle **[§2.4.3-3]** *h* ed *y* hanno lo stesso comportamento, e si tenga presente la **[§2.4.3-2c]**. Siccome il membro di sinistra, che indico con *Φ* è crescente con *h* (od *y*), dal momento che la sua derivata – indico quella rispetto da h, per l'altra basta scambiare le variabili – è:

$\frac{\partial\Phi(h,y)}{\partial h} = \frac{2}{h(1-h^2y^2)}$ **[§2.4.3-3da]**.

[lxxxi] È possibile il calcolo alternativo Var=M^2-μ^2 (la varianza è data anche dal momento secondo meno il quadrato della media), che nel nostro caso varrebbe: $\frac{\int_{t-\delta}^{t-\delta} l^2(y)dy}{\int_{t-\delta}^{t-\delta} dy} - \left[l(t) + k\frac{\delta}{3}\right]^2$ **[§2.5.1-1 bis]**.

[lxxxii] Al quadrato, perché la proporzionalità corretta si ha sullo scarto quadratico medio, radice quadrata della varianza.
[lxxxiii] O meglio, allo scarto quadratico medio: cfr. nota lxxxii.
[lxxxiv] Otteniamo:

$$\Theta(k,t,\delta) = 4k^2t^2 - 4k(1+k)t + \frac{4}{15}k^2\delta^2 + (1+k)^2 = 4k[l(y,k)] + \frac{4}{15}k^2\delta^2 + (1-k)^2$$ **[§2.5.1-1b]**.

[lxxxv] Sarà quindi *z*=0 e *γ*=1.
[lxxxvi] Che è, a meno della costante *$l^2(0)$*:

$$\left(z^2+\frac{\gamma^2}{3}\right)t^4 - 2\left(z^2+z+\frac{\gamma^2}{3}\right)t^3 + \left(2z^2\delta^2+\frac{2}{3}\gamma^2\delta^2+z^2+\frac{\gamma^2}{3}+4z+1\right)t^2 - 2\left(z^2\delta^2+\frac{\gamma^2\delta^2}{3}+z\delta^2+z+1\right)t + \left(\frac{z^2\delta^4}{5}+\frac{\gamma^2\delta^4}{15}+\right.$$

[§2.5.1-4.1]; sull'intero intervallo vale perciò $\frac{31}{90}$ *$l^2(0)$*.

[lxxxvii] Alla potenza quarta appaiono solo quelli relativi all'età, perché questa compare al quadrato nella formula dei sopravviventi.
[lxxxviii] Rispetto alla variabile k, consideriamo i segni dal punto di vista meramente formale. Nella **[§2.5.1-1a]**, infatti, l'addendo $-4k(1+k)t$ ha valore positivo per *k* negativo.
[lxxxix] In senso debole, ovvero non decrescente.

[xc] Dovendo trovare un carattere che cresca con l'età, *l(y)* non va bene; i decessi cumulati *D(y)* valgono $\int_0^y d(\upsilon)d\upsilon = l(0) - l(y) = l(0)\left[(1+k)y - ky^2\right]$ **[§2.6-1.1]**. Vanno poi rapportati al valore finale *D(1)* (in quanto 1 è l'età finale), ottenendo *q(y)*=$\frac{3(1+k)y^2 - 2ky^3}{3+k}$ **[§2.6-1.2]**. A questo punto possiamo costruire $R_y = \frac{\int_0^1 [p(y) - q(y)]dy}{\int_0^1 p(y)dy}$ **[§2.6-1a]**, ove *p(y)* = *y* (rappresenta in realtà la frazione di età cumulata e in altri contesti ha formulazione diversa, cfr. la **[§2.6-2.1]** in nota xcii) da cui otteniamo la **[§2.6-1]**.

[xci] Si noti che la distribuzione meno sperequata corrisponde alla mortalità minore, quella del caso ♥ di parametro *k*=-1.

[xcii] Qui $p(y) = \frac{y - (t-\delta)}{(t+\delta) - (t-\delta)} = \frac{y - t + \delta}{2\delta}$ **[§2.6-2.1]**.

[xciii] Il numeratore riecheggia quello del **[§2.1-8]**, ed è riscrivibile come $(1-kt) + k(1-t)$ **[§2.6-2aa]**.

[xciv] È $\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1-y}{3-y}\right) = -\frac{2}{3(3-y)^2}$ **[§2.6-4a]**.

[xcv] Si ricordi che *k* è negativo nei casi rossi.

[xcvi] Se poniamo *l(k;y) = l(-k;w)* **[§2.7-2]** possiamo scoprire a quale età *y** i sopravviventi si pareggiano con quelli del *k* opposto. Avremo $ky^2 - (1+k)y + kw^2 + (1-k)w = 0$ **[§2.7-2bis]**, da cui (completando con i due casi estremi):

Caso	***k***	***y****
generale	$\in [0,1]$	$\frac{1+k \pm \sqrt{(1+k)^2 - 4k\left[kw^2 + (1-k)w\right]}}{2k}$ **[§2.7-2a]**
♠	1	$1 - \sqrt{1-w^2}$ **[§2.7-2a1]**
♥	-1	$\sqrt{2w - w^2}$ **[§2.7-2a2]**

Si pensi anche al §2.3, relativo all'età mediana (per la quale la **[§2.7-1b.bis]** risulta pari ad ½). In particolare le formule **[§2.3-10*x*]** e **[§2.3-11.*x*]** possono indicare la sperequazione da ascriversi al *k*.

[xcvii] Non è un caso: la speranza di vita corrisponde all'area sottesa alla curva degli *l(y)* dal punto *y* a quello finale (1 nel nostro caso), divisa per *l(y)* stesso: nel caso della speranza di vita alla nascita è immediata la semplificazione con l'*l(0)* al denominatore. Sarà dunque: $\int_r^s l(k;y)dy = T(k;r) - T(k;s) = l(k;r) \cdot e(k;r) - l(k;s) \cdot e(k;s)$ **[§2.7-1.d]**, e analogamente per le altre integrazioni di sopravviventi. Si ricordi poi che $T(0;k) + T(0;-k) = l(0)$ **[§2.7-1.d]**, ovvero l'intera area del rettangolo (o quadrato, qualora si ponga *l(0)*=1).