§3 Relatività (generale)

§3.1 L'ennesimo caso

La funzione a parabola che abbiamo commentato si presta ad alcune generalizzazioni. Le condizioni da rispettare sono le quattro già indicate all'inizio del §1: età compresa tra 0 ed 1 (ω nel caso più generale), campo d'esistenza variabile tra *l(0)* all'età iniziale e 0 all'età finale, andamento non crescente.
L'operazione di partenza è moltiplicare *l(0)* per un fattore mai superiore ad 1 e non crescente (in pratica, decrescente fino a 0).
Un modo pratico di ottenere questo risultato è mantenere la struttura in tre fattori della **[§1.0-5a]**, poi rivista nella **[§2.0-6a]**[xcviii]: ${}^{A}l_{k}^{p.q}(y) = l(0)(1-y)^{p}(1-ky)^{q}$ **[§3.1-1]**; perché la curva scenda, occorrerà che *p* e *q* siano positivi; la trattazione matematica sarà più agevole, se si tratterà di numeri naturali.
Dal momento che manteniamo il CdE di *k*, che può dunque variare nell'intervallo [-1,1], sarà parimenti necessario che $p \geq q$ **[§3.1-1.1]**. Un caso particolarmente interessante è quello *p = q*, dal quale: ${}^{A}l^{p.p}(y) = l(0)(1-y)^{p}(1-ky)^{p}$ **[§3.1-2]**, con i casi estremi ${}^{A}l^{p,p}{}_{\spadesuit}(y) = l(0)(1-y)^{2p}$ **[§3.1-2a]**, e ${}^{A}l^{p,p}{}_{\heartsuit}(y) = l(0)(1-y^{2p})$ **[§3.1-2b]**. Proprio per dare maggiore evidenza a questi casi estremi, e per prendere esplicitamente in considerazione la possibilità che questi siano caratterizzati da potenze dispari, possiamo sostituire la notazione *p* con $\frac{n}{2}$: il prezzo da pagare sarà ammettere nei casi dispari – un po' meno maneggevoli – anche l'evenienza di fattori non interi nei casi intermedi.

Avremo, per riassumere:

Caso	***p***	***q***	***k***	${}^{A}l^{p,q}(y)/\,l(0)$	**note**
A generale	$\geq q$	≥ 0	$\in[0,1]$	$(1-y)^{p}(1-ky)^{q}$ **[§3.1-1bis.]**	
${}^{A}\spadesuit_{p,q}$	”	”	1	$(1-y)^{p+q}$ **[§3.1-1bis.a]**	
^{A}DM$_{p(,q)}$	”	”	0	$(1-y)^{p}$ **[§3.1-1bis.b]**	*q* è irrilevante
${}^{A}\heartsuit_{p,q}$	”	”	-1	$(1-y)^{p}(1+y)^{q}$ **[§3.1-1bis.c]**	vale $(1-y^{2})^{p}(1+y)^{p-q}$ **[§3.1-1bis.c.bis]**
A bilanciata	= *q*	= *p*	”	$\sqrt{[(1-y)(1-ky)]^{n}}$ **[§3.1-1bis.d]**	$p = q = \frac{n}{2}$
${}^{A}\spadesuit_{n}$	”	”	1	$(1-y)^{n}$ **[§3.1-1bis.e]**	
^{A}DM$_{n}$	”	”	0	$\sqrt{(1-y)^{n}}$ **[§3.1-1bis.f]**	
${}^{A}\heartsuit_{n}$	”	”	-1	$\sqrt{(1-y^{2})^{n}}$ **[§3.1-1bis.g]**	

Si faccia attenzione alla funzione risultante dal parametro *k* nullo (lo indichiamo come "caso *DM*" per analogia alle sezioni precedenti): non abbiamo più la lineare, bensì un elevamento a potenza di questa[xcix]. Abbastanza sorprendentemente, si tratta di una funzione affine a quello derivante da *k* massimo (il caso ♠, nei nostri termini): l'unica differenza è nell'esponente. In altre parole, una funzione $(1-y)^{n}$ potrà derivare sia dal caso $DM_{n(,q)}$ che da quello $\spadesuit_{p+q=n}$.

Si noti infine che :
$\lim_{n\to 0} {}^{A}l_n(y) = l(0)$ **[§3.1-1.a]** e $\lim_{n\to\infty} {}^{A}l_n(y) = 0$ **[§3.1-1.b]**; più in generale, *n* è negativamente correlato alla sopravvivenza[c].
I decessi saranno quindi : ${}^{A}d = l(0)\,{}^{A}l^{\,p-1;q-1}(y)\left[p(1-ky)+kq(1-y)\right]$**[§3.1-2]**, che nel caso $p=q=\frac{n}{2}$ diventa ${}^{A}d^{\,n} = l(0)\,{}^{A}l^{\,n-2}(y)\frac{n}{2}(1+k-2ky)$**[§3.1-2a]**.
Il tasso di mortalità assume una forma particolarmente accattivante (si intende dal punto di vista meramente formale) : ${}^{A}\mu^{p,q}(y) = \frac{p}{1-y} + \frac{kq}{1-ky}$ **[§3.1-3]**[ci]; si tratta di una generalizzazione piuttosto immediata della **[§2.1-8 bis]**.

Una generalizzazione alternativa (la chiameremo B) è la ${}^{B}l^{\,n}(y) = l(0)(1-y)\frac{1-(-ky)^n}{1+ky}$ **[§3.1-4]**.
D'ora in avanti prenderò in considerazione come *n* solo i numeri naturali, perché si prestano agli sviluppi più interessanti: non solo hanno derivata continua anche per *k* positivo, ma soprattutto si trasformano direttamente in una sommatoria: ${}^{B}l^{\,n}(y) = l(0)(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i$ **[§3.1-4a]**.

Stavolta sarà:

Caso	*k*	${}^{B}l^n(y)/\,l(0)$	note
B	$\in[-1,1]$	$(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i$ **[§3.1-4a.bis]**	o: $1-(-k)^{n-1}y^n-(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^i$ **[§3.1-4a.ter]**
${}^{B}♠_n$	1	$1+(-y)^{n+1}+2\sum_{i=1}^{n}(-y)^i$ **[§3.1-4a.bis.a]**	
${}^{B}\mathrm{DM}_n$	0	1-*y* **[§3.1-4a.bis.b]**	caso lineare per qualsiasi *n*[cii]
${}^{B}♥_n$	-1	1-y^n **[§3.1-4a.bis.c]**	

La forma della **[§3.1-4a bis]** rende particolarmente invitante calcolare il limite per *n* che tende all'infinito:

Caso	*k*	${}^{B}l^\infty(y)/\,l(0)$	note
$\lim_{n\to\infty} {}^{B}l^{\,n}(y)$	$\in[-1,1]$	$\frac{1-y}{1+ky}$ **[§3.1-5]**	si ottiene anche come limite della **[§3.4a.ter]** per $n\to\infty$[ciii]
${}^{B}♠_\infty$	1	$\frac{1-y}{1+y}$ **[§3.1-5a]**	
${}^{B}\mathrm{DM}_\infty$	0	1-*y* **[§3.1-5b]**	caso lineare anche per
${}^{B}♥_\infty$	-1	1 **[§3.1-5c]**	nessuna mortalità sino ad *y*=1

Mentre le funzioni A e B non rettangolarizzano[civ], questo succede invece tra ${}^{A}♠_n$ e ${}^{B}♥_n$.
Se consideriamo *n* intero, possiamo ottenere la speranza di vita. Cominciamo con la retrocumulata ${}^{B}T^{\,n}(y) = \int_y^1 {}^{B}l^{\,n}(\upsilon)d\upsilon$; utilizzando la **[§3.1-4a.ter]** otteniamo:

$$ {}^{B}T^{\,n}(y) = l(0)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-k)^i\frac{\upsilon^{i+1}}{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1}(-k)^i\frac{\upsilon^{i+2}}{i+2}\right] = l(0)\left[\upsilon + (1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i k^{i-1}\frac{\upsilon^{i+1}}{i+1} + (-1)^n k^{n-1}\frac{\upsilon^{n+1}}{n+1}\right]_y^1 = $$

$l(0)(1-y)\left[1+(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{k^{i-1}}{i+1}\sum_{j=0}^{i}y^j+(-1)^n\frac{k^{n-1}}{n+1}\sum_{j=0}^{n}y^j\right]$ **[§3.1-6]**[cv]. La speranza di vita si ottiene dividendo per i sopravviventi: spariranno dunque il fattore di scala *l(0)* ed anche *(1-y)*. Avremo infatti: ${}^Be^n(y)=\frac{1+(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{k^{i-1}}{i+1}\sum_{j=0}^{i}y^j+(-1)^n\frac{k^{n-1}}{n+1}\sum_{j=0}^{n}y^j}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}$ **[§3.1-7]**. Si noti però che il numeratore è ulteriormente divisibile per *(1-y)*, che dunque ostinatamente riappare:

${}^Be^n(y)=(1-y)\frac{(1+k)\sum_{i=0}^{n-2}\left[\sum_{j=i}^{n-2}\frac{j-i+1}{j+2}(-1)^j k^j\right]y^i+(-1)^{n-1}\frac{k^{n-1}}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)y^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}$ **[§3.1-7 bis]**. Torniamo così alla configurazione spesso riemersa: un fattore di proporzionalità (usualmente alla vita residua) moltiplicato per uno correttivo e, a volte, per un fattore di scala[cvi].

La presenza del coefficiente *(1+k)* comporta una notevole semplificazione nel caso ♥, nel quale si elide; non troppo male neppure per ♠, per il quale non solo questo fattore si riduce a 2, ma soprattutto si semplificano le sommatorie con l'omissione dei *k*. Il caso più semplice, oltre che di regola più utile, è quello della speranza di vita alla nascita, nel quale si annullano tutti i termini in *y* (esclusi eventualmente quelli alla potenza zero): otteniamo un risultato particolarmente suggestivo in ♥.

Caso	*k*	${}^Be(y)/(1-y)$	${}^Be^n(0)$
generale	$\in[-1,1]$	$\frac{(1+k)\sum_{i=0}^{n-2}\left[\sum_{j=i}^{n-2}\frac{j-i+1}{j+2}(-1)^j k^j\right]y^i+(-1)^{n-1}\frac{k^{n-1}}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)y^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}$ **[§3.1-7ter]**	$(1+k)\left[\sum_{i=0}^{n-2}\frac{i+1}{i+2}(-1)^i k^i\right]+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}k^{n-1}$ **[§3.1-8]**
^{B}♠	1	$\frac{2\sum_{i=0}^{n-2}\left[\sum_{j=i}^{n-2}\frac{j-i+1}{j+2}(-1)^j\right]y^i+(-1)^{n-1}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)y^i}{n+1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(-y)^i}$ **[§3.1-7.a]**	$2\sum_{i=0}^{n-2}\frac{i+1}{i+2}(-1)^i+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ **[§3.1-8a]**
^{B}♥	-1	$\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)y^i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}y^i}$ **[§3.1-7.b]**	$\frac{n}{n+1}$ **[§3.1-8b]**

Ripetiamo poi il calcolo per *n* che tende all'infinito, sostituendo la **[§3.1-5]** alla **[§3.1-4a]**.

nella **[§3.1-6]**; partiamo dunque da

$${}^{B}T^{\infty}(y)=l(0)\int_{y}^{1}\frac{1-\upsilon}{1+k\upsilon}d\upsilon=l(0)\left[\frac{k\cdot\ln(1+k\upsilon)-k\upsilon}{k^{2}}\right]_{y}^{1}=l(0)\frac{(1+k)\ln\frac{1+k}{1+ky}-k(1-y)}{k^{2}}$$ **[§3.1-6.1]**. La

speranza di vita sarà quindi: $${}^{B}e^{\infty}(y)=\frac{{}^{B}T^{\infty}(y)}{{}^{B}l^{\infty}(y)}=(1+ky)\frac{(1+k)\ln\frac{1+k}{1+ky}-k(1-y)}{k^{2}(1-y)}$$ **[§3.1-7.1]**. Da qui:

Caso	***k***	${}^{B}e^{\infty}(y)$	${}^{B}e^{\infty}(0)$
generale	$\in[-1,1]$	$(1+ky)\frac{(1+k)\ln\frac{1+k}{1+ky}-k(1-y)}{k^{2}(1-y)}$ **[§3.1-7.1bis]**[cvii]	$\frac{(1+k)\ln(1+k)-k}{k^{2}}$ **[§3.1-8.1]**
^{B}♠	1	$\frac{1+y}{1-y}\left[2\ln\frac{2}{1+y}-(1-y)\right]$ **[§3.1-7.1a]**[cviii]	2ln2-1 **[§3.1-8.1a]**
^{B}♥	-1	1-*y* **[§3.1-7.1b]**	1[cix] **[§3.1-8.1b]**

Possiamo poi vedere come si comporta la funzione facendo la media per *k*: per generalizzare la **[§2.4.1-5a]** poniamo:

$${}^{B}_{\bar{k}}l^{n}(y)=\frac{\int_{-1}^{1}l(y,k)dk}{1-(-1)}=l(0)\frac{1-y}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(-y)^{i}\int_{-1}^{1}k^{i}dk=l(0)(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}\cdot\frac{(-y)^{i}}{i+1}=l(0)(1-y)\sum_{j=0}^{m}\frac{y^{2j}}{j+1}$$

[§3.1-9], con *m* massimo numero intero inferiore a $\frac{n-1}{2}$; per *n*→∞ avremo invece[cx]:

$${}^{B}_{\bar{k}}l^{\infty}(y)==l(0)\frac{1-y}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+ky}dk=l(0)\frac{1-y}{2}\left[\frac{\ln(1+ky)}{y}\right]_{-1}^{1}=l(0)\frac{1-y}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$ **[§3.1-9a]**[cxi]. Si tratta

quindi di un ammontare differente della pura media tra casi contrapposti, che vale

$^{B}l_{♣♦}=l(0)\frac{1-y}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[(hy)^{i}+(-hy)^{i}\right]==l(0)(1-y)\sum_{j=0}^{m}\left(h^{2}y^{2}\right)^{j}$ **[§3.1-9.1]**; per *n*→∞ questa varrebbe

invece $^{B}l^{\infty}_{♣♦}=l(0)\frac{1-y}{2}\left(\frac{1}{1-hy}+\frac{1}{1+hy}\right)=l(0)\frac{1-y}{1-h^{2}y^{2}}$ **[§3.1-9.1a]**, con il caso estremo

$^{B}l^{\infty}_{♠♥}=l(0)\frac{1}{1+y}$ **[§3.1-9.1a1]**[cxii].

Interessante anche la generalizzazione della **[§2.1-8 bis]**, più complessa che nel caso **[§3.1-3]**.

I decessi valgono ora $${}^{B}d(y)=l(0)\frac{1+k-kn(-ky)^{n-1}+(kn-n-1-k)(-ky)^{n}+n(-ky)^{n+1}}{(1+ky)^{2}}$$ **[§3.1-9]**,

che corrisponde a: $${}^{B}d(y)=l(0)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^{i}+k(1-y)\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^{i}\right]$$ **[§3.1-9.bis]**[cxiii]. L'incremento

tra una legge di grado *n* rispetto a quella di grado inferiore è quindi:

$\Delta^{B}d_{k}^{n}(y)={}^{B}d_{k}^{n}(y)-{}^{B}d_{k}^{n-1}(y)=k(n-1)(-ky)^{n-2}+n(-ky)^{n-1}$ **[§3.1-9.1]**[cxiv].

Dalla **[§3.19.bis]** (naturalmente con la **[§3.1-4a]**) possiamo costruire il tasso istantaneo:

$${}^{B}\mu(y)=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i + k(1-y)\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^i}{(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i} = \frac{1}{1-y}+k\frac{\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i} = \frac{1}{1-y}+k\left[1+\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i(-ky)^i - n(-ky)^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}\right]$$

[§3.1-10]. Per $n\to\infty$ sarà invece: ${}^{B}\mu^{\infty}(y)=\dfrac{\frac{1+k}{(1+ky)^2}}{\frac{1-y}{1+ky}}=\dfrac{1+k}{(1-y)(1+ky)}=\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{k}{1+ky}$ **[§3.1-11]**[cxv];

otteniamo quindi una formula curiosamente simile a quella relativa al caso n = 2. I casi notevoli saranno:

Caso	k	${}^{B}\mu^{n}(y)$	${}^{B}\mu^{\infty}(y)$
^{B}♠	1	$\frac{1}{1-y}+1+\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i(-y)^i - n(-y)^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(-y)^i}=\frac{2-y}{1-y}+\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i(-y)^i - n(-y)^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(-y)^i}$ **[§3.1-10a]**	$\frac{2}{1-y^2}$ **[§3.1-11a]**
DM	0	$\frac{1}{1-y}$ **[§3.1-10.b]**	$\frac{1}{1-y}$ **[§3.1-11.b]**
^{B}♥	-1	$\frac{1}{1-y}-\frac{\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)y^i}{\sum_{i=0}^{n-1}y^i}$ **[§3.1-10.c]**	0 **[§3.1-11.c]**

§3.2 Il calcolo del calco

Tutte le funzioni di sopravvivenza con ω finito posseggono una funzione complementare, quello che nelle arti plastiche chiameremmo il calco: si tratta in altri termini della funzione che rettangolarizza (per ricorrere all'espressione del §2.1). Adottando questo procedimento, che consiste nell'invertire il senso dell'età[cxvi], possiamo ricavare un'ulteriore curva. Torno su questo nell'Appendice 3, limitandomi adesso ad analizzare quella che deriva dal modello B, che varrà dunque nei casi interi (cui restringo l'analisi):

${}^{-B}l_k^n(y)=l(0)\left[1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i\right]$ **[§3.2-1]**.

Riprendendo le tabelle del §3.1, avremo:

Caso	k	${}^{-B}l^{n}(y)/l(0)$	note
-B generale	$\in[-1,1]$	$1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i$ **[§3.2-1.bis]**	$1-y\frac{1-k^n(1-y)^n}{1-k(1-y)}$ **[§3.2-1.ter]**[cxvii]
${}^{-B}$♠$_n$	1	$1-y\sum_{i=0}^{n-1}(1-y)^i$ **[§3.2-1.bis.a]**	
${}^{-B}DM_n$	0	1-y **[§3.2-1.bis.b]**	caso lineare per qualsiasi n

${}^{-B}\heartsuit_n$	-1	$1-y\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1-y)^i$ **[§3. 2-1.bis.c]**	

Anche qui è interessante effettuare il calcolo del limite per *n* che tende all'infinito:

Caso	*k*	${}^{-B}l^n(y)/\,l(0)$	note
$\lim_{n\to\infty}{}^{B}l^n(y)$	$\in[-1,1]$	$(1-y)\frac{1-k}{1-k(1-y)}$ **[§3.2-2]**	
${}^{B}\spadesuit_\infty$	1	0 **[§3.2-2.bis.a]**	nessun sopravvivente ad alcuna età
${}^{B}\mathrm{DM}_\infty$	0	1-*y* **[§3. 2-2.bis.b]**	caso lineare
${}^{B}\heartsuit_\infty$	-1	$2\frac{1-y}{2-y}$ **[§3. 2-2.bis.c]**	

Costruiamo adesso la retrocumulata dei sopravviventi[cxviii]:

$${}^{-B}T_k^n(y)=l(0)\int_y^1\left[1-\upsilon\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-\upsilon)^i\right]d\upsilon=\frac{l(0)}{k^2}\left[(1-k)\sum_{i=1}^{n}\frac{k^i(1-y)^i}{i}+k^{n+1}\frac{(1-y)^{n+1}}{n+1}-k(1-k)(1-y)\right]$$ **[§3 .2-3]**; portando fuori parentesi quadre *k(1-y)*, possiamo ancora una volta far riemergere la struttura basata sulla moltiplicazione tra età residua e fattore correttivo[cxix]:

$${}^{-B}T_k^n(y)=l(0)\frac{1-y}{k}\left[(1-k)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}+k^n\frac{(1-y)^n}{n+1}-(1-k)\right]$$ **[§3.2-3.bis]**[cxx].

È adesso semplice arrivare alla speranza di vita:

$${}^{-B}e_k^n(y)=(1-y)\frac{(1-k)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}-1\right]+k^n\frac{(1-y)^n}{n+1}}{k\left[1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i\right]}$$ **[§3.2-4]**.

Possiamo calcolare adesso i casi rilevanti:

Caso	*k*	${}^{-B}e^n(y)$	${}^{-B}e^n(0)$
generale	$\in[-1,1]$	$(1-y)\frac{(1-k)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k^{i-1}(1-y)^i}{i+1}+k^{n-1}\frac{(1-y)^n}{n+1}}{1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i}$ **[§3.2-4.bis]**[cxxi]	$(1-k)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k^{i-1}}{i+1}+\frac{k^{n-1}}{n+1}$ **[§3.2-4.1]**
${}^{B}\spadesuit$	1	$\frac{(1-y)^{n+1}}{(n+1)\left[1-y\sum_{i=0}^{n-1}(1-y)^i\right]}$ **[§3.2-4.bis.a]**	$\frac{1}{n+1}$ **[§3.2-4.1a]**
${}^{B}\heartsuit$	-1	$(1-y)\frac{2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^{i-1}(1-y)^i}{i+1}+(-1)^{n-1}\frac{(1-y)^n}{n+1}}{1-y\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1-y)^i}$ **[§3.2-4.bis.b]**	$2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^{i-1}}{i+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ **[§3.2-4.1b]**

Ripetiamo i calcoli per n che tende all'infinito. La **[§3.2-4]** diventa:

$${}^{-B}e_k^{\infty}(y)=(1-y)\lim_{n\to\infty}\frac{(1-k)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}-1\right]+k^n\frac{(1-y)^n}{n+1}}{k\left[1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i\right]}$$ **[§3.2-5]** che vale

$${}^{-B}e_k^{\infty}(y)=\frac{(1-y)(1-k)}{k}\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}-1}{1-y\sum_{i=0}^{\infty}k^i(1-y)^i}$$ **[§3.2-5.bis]**. Ma $\sum_{i=0}^{\infty}k^i(1-y)^i=\frac{1}{1-k(1-y)}$ **[§3.2-5.a]**,

quindi, trasformando il denominatore e semplificando: ${}^{-B}e_k^{\infty}(y)=\frac{1-k(1-y)}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}$ **[§3.2-5.b]**. Si noti a questo punto che sviluppando in McLaurin per $x\in[0,1)$ abbiamo: $\ln(1-x)=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i}$ **[§3.2-5.c]**[cxxii]; da qui avremo la tavola sottostante:

Caso	k	${}^{-B}e^{\infty}(y)$	${}^{-B}e^{\infty}(0)$
generale	$\in[-1,1]$	$-\frac{1-k(1-y)}{k^2(1-y)}\{\ln[1-k(1-y)]+k(1-y)\}$ **[§3.2-5.ter]**	$-\frac{(1-k)[\ln(1-k)+k]}{k^2}$ **[§3.2-5.1]**
^{B}♠	1	$\frac{y}{1-y}[(1-y)-\ln y]$ **[§3.2-5.ter.a]**	0[cxxiii] **[§3.2-5.1a]**
^{B}♥	-1	$-\frac{2-y}{1-y}[\ln(2-y)-(1-y)]$ **[§3.2-4.ter.b]**	2(1-ln2) **[§3.2-5.1b]**

Naturalmente esiste una via molto più comoda per calcolare le retrocumulata, o le speranze di vita (specie alla nascita): prendere quelle relative al caso B e calcolarne i complementi, secondo quanto indicato nell'Appendice 3.

[xcviii] Denomino A questo tipo di funzione; gli indici p,q (od n, che useremo più in là) e k sono ovviamente sottintendibili in molti casi.

[xcix] Si tratta della formula di Achard, che traggo da Levi (cfr. nota **Errore. Il segnalibro non è definito.**).

[c] Nel caso della distribuzione bilanciata $p=q$ abbiamo $\frac{\partial l^A(n;y)}{\partial n}=\frac{\ln[(1-y)(1-ky)]}{2}\cdot l^A(n;y)$ **[§3.1-1.2]** (si ricordi che il logaritmo è negativo); nel caso più generale conviene porre $q=hp$, con $0<h<1$, e calcolare:

$$\frac{\partial l^A(p;y)}{\partial p}=[\ln(1-y)+h\cdot\ln(1-ky)]\cdot l^A(p;y)=\ln\left[(1-y)\sqrt[\frac{1}{h}]{1-ky}\right]\cdot l^A(p;y)$$ **[§3.1-1.2.1]**.

[ci] Adottando la convenzione utilizzata per il **[§3.1-1.2.1]** varrebbe: $\mu^{A;p,q}(y)=p\left(\frac{1}{1-y}+\frac{hk}{1-ky}\right)$ **[§3.1-3.bis]**.

[cii] Si ricordi che n è qui un numero naturale.

[ciii] È infatti: $\lim_{n\to\infty}\left[1+k^{n-1}(-y)^n+(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}k^{i-1}(-y)^i\right]=1+0+\frac{1+k}{k}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(-ky)^i=1+\frac{1+k}{k}\left[\frac{1}{1+ky}-1\right]$

[civ] Ovvero per nessuno dei due modelli vale $l_k(y)+l_{-k}(1-y)=l(0)$; si veda il §2.1.

[cv] Possiamo arrivarci anche dalla **[§3.1-4]**, sviluppando il prodotto e tenendo conto del fatto che $\int \frac{\upsilon^r}{1+k\upsilon}d\upsilon = I(r) = k^{-(r+1)}\left[\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{r-1-i}\frac{(k\upsilon)^{i+1}}{i+1}+(-1)^r\ln(1+k\upsilon)\right]+c$ **[§3.1-6a]**. L'integrale appare con r=1, n, n+1 (e anche 0, ma in quel caso conviene porre direttamente $I(0)=\frac{\ln(1+k\upsilon)}{k}+c$ **[§3.1-6a.1]**. Per fortuna (esiste, in matematica?) le espressioni contenenti il logaritmo si elidono, e possiamo porre $(-1)^{2n-i}=(-1)^{2(n-i)}(-1)^{i}=(-1)^{i}$.

[cvi] Naturalmente possiamo ottenere la speranza di vita anche come età media alla morte meno l'età già raggiunta. Mettendo i decessi tra parentesi quadra, avremmo:

$${}^{B}e(y)=\frac{1}{(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}\int_y^1\left[(1+k)\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-k\upsilon)^i+n(-k\upsilon)^{n-1}\right]\upsilon d\upsilon - y$$ **[§3.1-7 ter]**, che vale

$${}^{B}e(y)=\frac{(1+k)\sum_{i=0}^{n-2}\frac{i+1}{i+2}(-k)^i\sum_{j=0}^{i+1}y^j+\frac{n}{n+1}(-k)^{n-1}\sum_{j=0}^{n}y^j-y\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}$$ **[§3.1-7 ter.1]**.

Verificare l'equivalenza con la **[§3.1-7]** è un po' macchinoso, anche se il denominatore si elimina subito. Con qualche piccolo aggiustamento partiamo allora da:

$$1-(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-k)^{i-1}}{i+1}\sum_{j=0}^{i}y^j-\frac{(-k)^{n-1}}{n+1}\sum_{j=0}^{n}y^j=(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{i+1}(-k)^{i-1}\sum_{j=0}^{i}y^j+\frac{n}{n+1}(-k)^{n-1}\sum_{j=0}^{n}y^j-y\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i$$

[§3.1-7 ter.2], che diventa, semplificando qualche sommatoria omogenea:

$$1=(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}\sum_{j=0}^{i}y^j+(-k)^{n-1}\sum_{j=0}^{n}y^j-y\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i$$ **[§3.1-7 ter.3]**.

Conviene moltiplicare ambedue i membri per (1-y) facendo così sparire le sommatorie in j, e togliere il primo termine all'ultima sommatoria, dalla quale estraiamo anche un (-k):

$$1-y=(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}(1-y^{i+1})+(-k)^{n-1}(1-y^{n+1})+ky(1-y)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^i-y+y^2$$ **[§3.1-7 ter.4]**.

In pochi passaggi arriviamo così a:

$$1-y^2=(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}-y(1+ky)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^i+(-k)^{n-1}(1-y^{n+1})$$ **[§3.1-7 ter.5]**, che nonostante le apparenze conferma la nostra verifica; va infatti tenuto presente che

$$y(1+ky)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^i=\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^{i+1}-\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^i y^{i+2}=y^2-(-k)^{n-1}y^{n+1}$$ **[§3.1-7 ter.6]**, mentre

naturalmente $(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}=\sum_{i=0}^{n-2}(-k)^i-\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^i=1-(-k)^{n-1}$ **[§3.1-7 ter.7]**.

[cvii] L'espressione è indefinita per y unitario. Ma scindendo la parte logaritmica e trasformandola secondo Taylor, vediamo che il limite per $y\to1$ vale:

$$\lim_{y\to1}\frac{1+ky}{1-y}\left[(1+k)\ln\frac{1+k}{1+ky}-k(1-y)\right]=(1+k)\lim_{y\to1}\frac{(1+k)\left\{\ln(1+k)-\left[\ln(1+k)+k\frac{y-1}{1+k}\right]\right\}-k(1-y)}{1-y}$$

$$=(1+k)\lim_{y\to1}\frac{k(1-y)-k(1-y)}{1-y}=(1+k)(k-k)=0$$ **[§3.1-7.1bis1]**

[cviii] Ripetendo l'operazione in questo caso particolare:

$$\lim_{y\to 1}\frac{1+y}{1-y}\left[2\ln\frac{2}{1+y}-(1-y)\right]=2\lim_{y\to 1}\frac{2\left[\ln 2-\left(\ln 2+\frac{y-1}{2}\right)\right]+(1-y)}{1-y}=2\lim_{y\to 1}\frac{-(1-y)+(1-y)}{1-y}=2(1-1)=0$$

[§3.1-7.1a1] (questo perché l'azzeramento al numeratore prevale sullo zero al denominatore).

[cix] Deriva immediatamente dalla **[§3.1-7.1b]**; per ricavarla dalla **[§3.1-8.1]**, si tenga presente che $\lim_{k\to -1}(1+k)\ln(1+k)=\lim_{x\to 0}x\ln x=0$ (si risolve facilmente con la formula di de l'Hôpital).

[cx] L'Integrale si calcola con la sostituzione $z = 1+ky$.

[cxi] Per y=0 il valore va calcolato al limite, e restituisce *l(0)*, come deve (il logaritmo sviluppato in McLaurin vale 2*y*).

[cxii] Si noti che i sopravviventi all'età 1 (quella finale) sarebbero ancora la metà del contingente iniziale, destinati quindi a morire tutti insieme allo scoccare del fatale momento. ${}^{\mathrm{B}}\mu^{\infty}_{♠♥}=\frac{1}{1+y}$ **[§3.1-9.1a2]**.

[cxiii] La prima formulazione è ottenuta dalla **[§3.1-4]**, la seconda dalla **[§3.1-4a]**. Quest'ultima è esprimibile, fra l'altro, anche come ${}^{B}d(y)=l(0)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i+k(1-y)\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^i\right]$ **[§3.1-9.ter]**, o come

${}^{B}d(y)=l(0)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)(-ky)^i+k\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^i\right]$ **[§3.1-9.quater]**.

[cxiv] Tale incremento sarà positivo per $(-ky)^{n-2}[k(n-1)-kny]>0$ **[§3.1-9.1a]**. Per $(-ky)^{n-2}<0$ (quindi se abbiamo contemporaneamente *n* dispari e *k* positivo) sarà: $k(n-1)-kny<0\Rightarrow n-1-ny<0\Rightarrow y>\frac{n-1}{n}$ **[§3.1-9.1a.1]**.

Se invece *n* è pari e *k* positivo, avremo: : $k(n-1)-kny>0\Rightarrow n-1-ny>0\Rightarrow y<\frac{n-1}{n}$ **[§3.1-9.1a.2]**. Se infine *n* è pari e *k* negativo: $k(n-1)-kny>0\Rightarrow n-1-ny<0\Rightarrow y>\frac{n-1}{n}$ **[§3.1-9.1a.3]**, tornando così all'esito della **[§3.1-9.1a.1]**. I decessi quindi tendono ad aumentare al crescere di *n* sempre più a ridosso dell'età finale nei casi ♦. In quelli ♣, abbiamo invece un'oscillazione tra *n* pari e dispari.

[cxv] La **[§3.1-11]** si può anche ottenere come limite per *n*→∞ della **[§3.1-10]**; deve infatti essere:

$${}^{B}\mu^{\infty}(y)=\lim_{n\to\infty}{}^{B}\mu^{n}(y)\Rightarrow\frac{1}{1-y}+\frac{k}{1+ky}=\frac{1}{1-y}+k\frac{\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(-ky)^i}{\sum_{i=0}^{\infty}(-ky)^i}$$

[§3.1-11.1]; avremo allora:

$$\frac{1}{1+ky}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(-ky)^i}{\frac{1}{1+ky}}\Rightarrow\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(-ky)^i=\frac{1}{(1+ky)^2}$$

[§3.1-11.1a]. Basterà a questo punto notare che lo sviluppo di McLaurin di $\frac{1}{(1-x)^2}$ è $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i$ **[§3.1-11.1ab]**, o più semplicemente ponendo $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)^2$ **[§3.1-11.1ab bis]**, sostituendo poi –*ky* ad *x*. Lo stesso processo è proponibile per i casi notevoli in tabella.

[cxvi] Scambiando *y* con *(1-y)* – ovvero *x* con *(ω-x)* nel caso più generale. In questo studio si moltiplica inoltre il parametro *k* per -1: cambiarne il segno assicura che se mantenga il significato originale (favorevole alla sopravvivenza se negativo, viceversa se positivo).

[cxvii] La formula vale anche per *n* non intero.

[cxviii] Nell'integrazione aiuta il cambio di variabile *z=k(1-υ)*.

[cxix] Il *k* è incluso nella risistemazione per meglio semplificare la formula. Si noti che *i* deve però diventare *i+1*.

[cxx] Un metodo alternativo per ottenere la **[§3.2-3]** è quello di ricavarla dal modello B, ricordando come si dividono le strisce del rettangolo risultante dalla giustapposizione dei modelli complementari; in formula:

${}^{-B}T_{k}^{n}(y) = l(0)(1-y) - \left[{}^{B}T_{-k}^{n}(0) - {}^{B}T_{-k}^{n}(1-y)\right]$**[§3.2-3.1]**. Naturalmente varrà anche la:
${}^{B}T_{k}^{n}(y) = l(0)(1-y) - \left[{}^{-B}T_{-k}^{n}(0) - {}^{-B}T_{-k}^{n}(1-y)\right]$**[§3.2-3.1a]**.

[cxxi] In questa versione della formula elimino il *k* al denominatore.

[cxxii] Il nostro caso sarà quindi $-\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i}$ **[§3.2-5.d]**, poi dovremmo sostituire *k*(1-*y*) a *x* e sottrarre 1.

[cxxiii] Si veda la cix.

§3 Relatività (generale)

§3.1 L'ennesimo caso

La funzione a parabola che abbiamo commentato si presta ad alcune generalizzazioni. Le condizioni da rispettare sono le quattro già indicate all'inizio del §1: età compresa tra 0 ed 1 (ω nel caso più generale), campo d'esistenza variabile tra *l(0)* all'età iniziale e 0 all'età finale, andamento non crescente.
L'operazione di partenza è moltiplicare *l(0)* per un fattore mai superiore ad 1 e non crescente (in pratica, decrescente fino a 0).
Un modo pratico di ottenere questo risultato è mantenere la struttura in tre fattori della **[§1.0-5a]**, poi rivista nella **[§2.0-6a]**[xcviii]: ${}^{A}l_k^{p.q}(y) = l(0)(1-y)^p(1-ky)^q$ **[§3.1-1]**; perché la curva scenda, occorrerà che *p* e *q* siano positivi; la trattazione matematica sarà più agevole, se si tratterà di numeri naturali.
Dal momento che manteniamo il CdE di *k*, che può dunque variare nell'intervallo [-1,1], sarà parimenti necessario che $p \geq q$ **[§3.1-1.1]**. Un caso particolarmente interessante è quello *p* = *q*, dal quale: ${}^{A}l^{p.p}(y) = l(0)(1-y)^p(1-ky)^p$ **[§3.1-2]**, con i casi estremi ${}^{A}l^{p,p}{}_{♠}(y) = l(0)(1-y)^{2p}$ **[§3.1-2a]**, e ${}^{A}l^{p,p}{}_{♥}(y) = l(0)(1-y^{2p})$ **[§3.1-2b]**. Proprio per dare maggiore evidenza a questi casi estremi, e per prendere esplicitamente in considerazione la possibilità che questi siano caratterizzati da potenze dispari, possiamo sostituire la notazione *p* con $\frac{n}{2}$: il prezzo da pagare sarà ammettere nei casi dispari – un po' meno maneggevoli – anche l'evenienza di fattori non interi nei casi intermedi.

Avremo, per riassumere:

Caso	p	q	k	${}^{A}l^{p,q}(y)/\,l(0)$	note
A generale	$\geq q$	≥ 0	$\in [0,1]$	$(1-y)^p(1-ky)^q$ **[§3.1-1bis.]**	
${}^{A}♠_{p,q}$	”	”	1	$(1-y)^{p+q}$ **[§3.1-1bis.a]**	
${}^{A}DM_{p(,q)}$	”	”	0	$(1-y)^p$ **[§3.1-1bis.b]**	*q* è irrilevante
${}^{A}♥_{p,q}$	”	”	-1	$(1-y)^p(1+y)^q$ **[§3.1-1bis.c]**	vale $(1-y^2)^p(1+y)^{p-q}$ **[§3.1-1bis.c.bis]**
A bilanciata	= *q*	= *p*	”	$\sqrt{[(1-y)(1-ky)]^n}$ **[§3.1-1bis.d]**	$p = q = \frac{n}{2}$
${}^{A}♠_{n}$	”	”	1	$(1-y)^n$ **[§3.1-1bis.e]**	
${}^{A}DM_{n}$	”	”	0	$\sqrt{(1-y)^n}$ **[§3.1-1bis.f]**	
${}^{A}♥_{n}$	”	”	-1	$\sqrt{(1-y^2)^n}$ **[§3.1-1bis.g]**	

Si faccia attenzione alla funzione risultante dal parametro *k* nullo (lo indichiamo come “caso *DM*” per analogia alle sezioni precedenti): non abbiamo più la lineare, bensì un elevamento a potenza di questa[xcix]. Abbastanza sorprendentemente, si tratta di una funzione affine a quello derivante da *k* massimo (il caso ♠, nei nostri termini): l'unica differenza è nell'esponente. In altre parole, una funzione $(1-y)^n$ potrà derivare sia dal caso $DM_{n(,q)}$ che da quello $♠_{p+q=n}$.

Si noti infine che :
$\lim_{n\to 0} {}^A l_n(y) = l(0)$ **[§3.1-1.a]** e $\lim_{n\to\infty} {}^A l_n(y) = 0$ **[§3.1-1.b]**; più in generale, *n* è negativamente correlato alla sopravvivenza[c].
I decessi saranno quindi : ${}^A d = l(0)^A l^{\,p-1;q-1}(y)[p(1-ky)+kq(1-y)]$**[§3.1-2]**, che nel caso $p=q=\frac{n}{2}$ diventa ${}^A d^{\,n} = l(0)^A l^{\,n-2}(y)\frac{n}{2}(1+k-2ky)$**[§3.1-2a]**.
Il tasso di mortalità assume una forma particolarmente accattivante (si intende dal punto di vista meramente formale) : ${}^A\mu^{p,q}(y) = \frac{p}{1-y} + \frac{kq}{1-ky}$ **[§3.1-3]**[ci]; si tratta di una generalizzazione piuttosto immediata della **[§2.1-8 bis]**.
Una generalizzazione alternativa (la chiameremo B) è la ${}^B l^{\,n}(y) = l(0)(1-y)\frac{1-(-ky)^n}{1+ky}$ **[§3.1-4]**.
D'ora in avanti prenderò in considerazione come *n* solo i numeri naturali, perché si prestano agli sviluppi più interessanti: non solo hanno derivata continua anche per *k* positivo, ma soprattutto si trasformano direttamente in una sommatoria: ${}^B l^{\,n}(y) = l(0)(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i$ **[§3.1-4a]**.

Stavolta sarà:

Caso	*k*	$^Bl^n(y)/l(0)$	note
B	$\in[-1,1]$	$(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i$ **[§3.1-4a.bis]**	o: $1-(-k)^{n-1}y^n-(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^i$ **[§3.1-4a.ter]**
^{B}♠$_n$	1	$1+(-y)^{n+1}+2\sum_{i=1}^{n}(-y)^i$ **[§3.1-4a.bis.a]**	
^{B}DM$_n$	0	1-*y* **[§3.1-4a.bis.b]**	caso lineare per qualsiasi *n*[cii]
^{B}♥$_n$	-1	1-y^n **[§3.1-4a.bis.c]**	

La forma della **[§3.1-4a bis]** rende particolarmente invitante calcolare il limite per *n* che tende all'infinito:

Caso	*k*	$^Bl^\infty(y)/l(0)$	note
$\lim_{n\to\infty} {}^B l^{\,n}(y)$	$\in[-1,1]$	$\frac{1-y}{1+ky}$ **[§3.1-5]**	si ottiene anche come limite della **[§3.4a.ter]** per *n*→∞[ciii]
^{B}♠$_\infty$	1	$\frac{1-y}{1+y}$ **[§3.1-5a]**	
^{B}DM$_\infty$	0	1-*y* **[§3.1-5b]**	caso lineare anche per
^{B}♥$_\infty$	-1	1 **[§3.1-5c]**	nessuna mortalità sino ad *y*=1

Mentre le funzioni A e B non rettangolarizzano[civ], questo succede invece tra ^{A}♠$_n$ e ^{B}♥$_n$.
Se consideriamo *n* intero, possiamo ottenere la speranza di vita. Cominciamo con la retrocumulata ${}^B T^{\,n}(y) = \int_y^1 {}^B l^{\,n}(\upsilon)d\upsilon$; utilizzando la **[§3.1-4a.ter]** otteniamo:

$$ {}^B T^{\,n}(y) = l(0)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-k)^i\frac{\upsilon^{i+1}}{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1}(-k)^i\frac{\upsilon^{i+2}}{i+2}\right] = l(0)\left[\upsilon + (1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i k^{i-1}\frac{\upsilon^{i+1}}{i+1} + (-1)^n k^{n-1}\frac{\upsilon^{n+1}}{n+1}\right]_y^1 = $$

$l(0)(1-y)\left[1+(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{k^{i-1}}{i+1}\sum_{j=0}^{i}y^j+(-1)^n\frac{k^{n-1}}{n+1}\sum_{j=0}^{n}y^j\right]$ **[§3.1-6]**[cv]. La speranza di vita si ottiene dividendo per i sopravviventi: spariranno dunque il fattore di scala *l(0)* ed anche *(1-y)*. Avremo infatti:

$${}^Be^n(y)=\frac{1+(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{k^{i-1}}{i+1}\sum_{j=0}^{i}y^j+(-1)^n\frac{k^{n-1}}{n+1}\sum_{j=0}^{n}y^j}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}$$

[§3.1-7]. Si noti però che il numeratore è ulteriormente divisibile per *(1-y)*, che dunque ostinatamente riappare:

$${}^Be^n(y)=(1-y)\frac{(1+k)\sum_{i=0}^{n-2}\left[\sum_{j=i}^{n-2}\frac{j-i+1}{j+2}(-1)^jk^j\right]y^i+(-1)^{n-1}\frac{k^{n-1}}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)y^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}$$

[§3.1-7 bis]. Torniamo così alla configurazione spesso riemersa: un fattore di proporzionalità (usualmente alla vita residua) moltiplicato per uno correttivo e, a volte, per un fattore di scala[cvi].

La presenza del coefficiente *(1+k)* comporta una notevole semplificazione nel caso ♥, nel quale si elide; non troppo male neppure per ♠, per il quale non solo questo fattore si riduce a 2, ma soprattutto si semplificano le sommatorie con l'omissione dei *k*. Il caso più semplice, oltre che di regola più utile, è quello della speranza di vita alla nascita, nel quale si annullano tutti i termini in *y* (esclusi eventualmente quelli alla potenza zero): otteniamo un risultato particolarmente suggestivo in ♥.

Caso	k	${}^Be(y)/(1-y)$	${}^Be^n(0)$
generale	$\in[-1,1]$	$\frac{(1+k)\sum_{i=0}^{n-2}\left[\sum_{j=i}^{n-2}\frac{j-i+1}{j+2}(-1)^jk^j\right]y^i+(-1)^{n-1}\frac{k^{n-1}}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)y^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}$ **[§3.1-7ter]**	$(1+k)\left[\sum_{i=0}^{n-2}\frac{i+1}{i+2}(-1)^ik^i\right]+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}k^{n-1}$ **[§3.1-8]**
^{B}♠	1	$\frac{2\sum_{i=0}^{n-2}\left[\sum_{j=i}^{n-2}\frac{j-i+1}{j+2}(-1)^j\right]y^i+(-1)^{n-1}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)y^i}{n+1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(-y)^i}$ **[§3.1-7.a]**	$2\sum_{i=0}^{n-2}\frac{i+1}{i+2}(-1)^i+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ **[§3.1-8a]**
^{B}♥	-1	$\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)y^i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}y^i}$ **[§3.1-7.b]**	$\frac{n}{n+1}$ **[§3.1-8b]**

Ripetiamo poi il calcolo per *n* che tende all'infinito, sostituendo la **[§3.1-5]** alla **[§3.1-4a]**.

nella **[§3.1-6]**; partiamo dunque da

$$^{B}T^{\infty}(y)=l(0)\int_{y}^{1}\frac{1-\upsilon}{1+k\upsilon}d\upsilon=l(0)\left[\frac{k\cdot\ln(1+k\upsilon)-k\upsilon}{k^{2}}\right]_{y}^{1}=l(0)\frac{(1+k)\ln\frac{1+k}{1+ky}-k(1-y)}{k^{2}}$$ **[§3.1-6.1]**. La

speranza di vita sarà quindi: $^{B}e^{\infty}(y)=\frac{^{B}T^{\infty}(y)}{^{B}l^{\infty}(y)}=(1+ky)\frac{(1+k)\ln\frac{1+k}{1+ky}-k(1-y)}{k^{2}(1-y)}$ **[§3.1-7.1]**. Da qui:

Caso	*k*	$^{B}e^{\infty}(y)$	$^{B}e^{\infty}(0)$
generale	$\in[-1,1]$	$(1+ky)\frac{(1+k)\ln\frac{1+k}{1+ky}-k(1-y)}{k^{2}(1-y)}$ **[§3.1-7.1bis]**[cvii]	$\frac{(1+k)\ln(1+k)-k}{k^{2}}$ **[§3.1-8.1]**
$^{B}\spadesuit$	1	$\frac{1+y}{1-y}\left[2\ln\frac{2}{1+y}-(1-y)\right]$ **[§3.1-7.1a]**[cviii]	2ln2-1 **[§3.1-8.1a]**
$^{B}\heartsuit$	-1	1-*y* **[§3.1-7.1b]**	1[cix] **[§3.1-8.1b]**

Possiamo poi vedere come si comporta la funzione facendo la media per *k*: per generalizzare la **[§2.4.1-5a]** poniamo:

$${}^{B}_{k}l^{n}(y)=\frac{\int_{-1}^{1}l(y,k)dk}{1-(-1)}=l(0)\frac{1-y}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(-y)^{i}\int_{-1}^{1}k^{i}dk=l(0)(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}\cdot\frac{(-y)^{i}}{i+1}=l(0)(1-y)\sum_{j=0}^{m}\frac{y^{2j}}{j+1}$$

[§3.1-9], con *m* massimo numero intero inferiore a $\frac{n-1}{2}$; per $n\to\infty$ avremo invece[cx]:

$${}^{B}_{k}l^{\infty}(y)==l(0)\frac{1-y}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+ky}dk=l(0)\frac{1-y}{2}\left[\frac{\ln(1+ky)}{y}\right]_{-1}^{1}=l(0)\frac{1-y}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$ **[§3.1-9a]**[cxi]. Si tratta quindi di un ammontare differente della pura media tra casi contrapposti, che vale

$^{B}l_{\clubsuit\diamondsuit}=l(0)\frac{1-y}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[(hy)^{i}+(-hy)^{i}\right]==l(0)(1-y)\sum_{j=0}^{m}(h^{2}y^{2})^{j}$ **[§3.1-9.1]**; per $n\to\infty$ questa varrebbe

invece $^{B}l^{\infty}_{\clubsuit\diamondsuit}=l(0)\frac{1-y}{2}\left(\frac{1}{1-hy}+\frac{1}{1+hy}\right)=l(0)\frac{1-y}{1-h^{2}y^{2}}$ **[§3.1-9.1a]**, con il caso estremo

$^{B}l^{\infty}_{\spadesuit\heartsuit}=l(0)\frac{1}{1+y}$ **[§3.1-9.1a1]**[cxii].

Interessante anche la generalizzazione della **[§2.1-8 bis]**, più complessa che nel caso **[§3.1-3]**.

I decessi valgono ora $^{B}d(y)=l(0)\frac{1+k-kn(-ky)^{n-1}+(kn-n-1-k)(-ky)^{n}+n(-ky)^{n+1}}{(1+ky)^{2}}$ **[§3.1-9]**,

che corrisponde a: $^{B}d(y)=l(0)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^{i}+k(1-y)\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^{i}\right]$ **[§3.1-9.bis]**[cxiii]. L'incremento tra una legge di grado *n* rispetto a quella di grado inferiore è quindi:

$\Delta^{B}d_{k}^{n}(y)={}^{B}d_{k}^{n}(y)-{}^{B}d_{k}^{n-1}(y)=k(n-1)(-ky)^{n-2}+n(-ky)^{n-1}$ **[§3.1-9.1]**[cxiv].

Dalla **[§3.19.bis]** (naturalmente con la **[§3.1-4a]**) possiamo costruire il tasso istantaneo:

$$^{B}\mu(y)=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i+k(1-y)\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^i}{(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}=\frac{1}{1-y}+k\frac{\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}=\frac{1}{1-y}+k\left[1+\frac{\sum_{i=1}^{n-1}i(-ky)^i-n(-ky)^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}\right]$$

[§3.1-10]. Per $n\to\infty$ sarà invece: $^{B}\mu^{\infty}(y)=\frac{\frac{1+k}{(1+ky)^2}}{\frac{1-y}{1+ky}}=\frac{1+k}{(1-y)(1+ky)}=\frac{1}{1-y}+\frac{k}{1+ky}$ **[§3.1-11]**[cxv];

otteniamo quindi una formula curiosamente simile a quella relativa al caso n = 2. I casi notevoli saranno:

Caso	*k*	$^{B}\mu^{n}(y)$	$^{B}\mu^{\infty}(y)$
^{B}♠	1	$\frac{1}{1-y}+1+\frac{\sum_{i=1}^{n-1}i(-y)^i-n(-y)^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(-y)^i}=\frac{2-y}{1-y}+\frac{\sum_{i=1}^{n-1}i(-y)^i-n(-y)^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1}(-y)^i}$ **[§3.1-10a]**	$\frac{2}{1-y^2}$ **[§3.1-11a]**
DM	0	$\frac{1}{1-y}$ **[§3.1-10.b]**	$\frac{1}{1-y}$ **[§3.1-11.b]**
^{B}♥	-1	$\frac{1}{1-y}-\frac{\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)y^i}{\sum_{i=0}^{n-1}y^i}$ **[§3.1-10.c]**	0 **[§3.1-11.c]**

§3.2 Il calcolo del calco

Tutte le funzioni di sopravvivenza con ω finito posseggono una funzione complementare, quello che nelle arti plastiche chiameremmo il calco: si tratta in altri termini della funzione che rettangolarizza (per ricorrere all'espressione del §2.1). Adottando questo procedimento, che consiste nell'invertire il senso dell'età[cxvi], possiamo ricavare un'ulteriore curva. Torno su questo nell'Appendice 3, limitandomi adesso ad analizzare quella che deriva dal modello B, che varrà dunque nei casi interi (cui restringo l'analisi):

$$^{-B}l_k^n(y)=l(0)\left[1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i\right]$$ **[§3.2-1]**.

Riprendendo le tabelle del §3.1, avremo:

Caso	*k*	$^{-B}l^{n}(y)/l(0)$	note
-B generale	$\in[-1,1]$	$1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i$ **[§3.2-1.bis]**	$1-y\frac{1-k^n(1-y)^n}{1-k(1-y)}$ **[§3.2-1.ter]**[cxvii]
-B♠ $_n$	1	$1-y\sum_{i=0}^{n-1}(1-y)^i$ **[§3.2-1.bis.a]**	
$^{-B}DM_n$	0	1-*y* **[§3.2-1.bis.b]**	caso lineare per qualsiasi *n*

$^{-B}♥_n$	-1	$1-y\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1-y)^i$ **[§3. 2-1.bis.c]**	

Anche qui è interessante effettuare il calcolo del limite per *n* che tende all'infinito:

Caso	k	$^{-B}l^n(y)/\ l(0)$	note
$\lim_{n\to\infty} {}^B l^n(y)$	$\in[-1,1]$	$(1-y)\frac{1-k}{1-k(1-y)}$ **[§3.2-2]**	
$^B♠_\infty$	1	0 **[§3.2-2.bis.a]**	nessun sopravvivente ad alcuna età
$^B DM_\infty$	0	1-*y* **[§3. 2-2.bis.b]**	caso lineare
$^B♥_\infty$	-1	$2\frac{1-y}{2-y}$ **[§3. 2-2.bis.c]**	

Costruiamo adesso la retrocumulata dei sopravviventi[cxviii]:

$$^{-B}T_k^n(y)=l(0)\int_y^1\left[1-\upsilon\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-\upsilon)^i\right]d\upsilon=\frac{l(0)}{k^2}\left[(1-k)\sum_{i=1}^{n}\frac{k^i(1-y)^i}{i}+k^{n+1}\frac{(1-y)^{n+1}}{n+1}-k(1-k)(1-y)\right]$$ **[§3.2-3]**; portando fuori parentesi quadre *k(1-y)*, possiamo ancora una volta far riemergere la struttura basata sulla moltiplicazione tra età residua e fattore correttivo[cxix]:

$$^{-B}T_k^n(y)=l(0)\frac{1-y}{k}\left[(1-k)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}+k^n\frac{(1-y)^n}{n+1}-(1-k)\right]$$ **[§3.2-3.bis]**[cxx].

È adesso semplice arrivare alla speranza di vita:

$$^{-B}e_k^n(y)=(1-y)\frac{(1-k)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}-1\right]+k^n\frac{(1-y)^n}{n+1}}{k\left[1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i\right]}$$ **[§3.2-4]**.

Possiamo calcolare adesso i casi rilevanti:

Caso	k	$^{-B}e^n\ (y)$	$^{-B}e^n\ (0)$
generale	$\in[-1,1]$	$(1-y)\frac{(1-k)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k^{i-1}(1-y)^i}{i+1}+k^{n-1}\frac{(1-y)^n}{n+1}}{1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i}$ **[§3.2-4.bis]**[cxxi]	$(1-k)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k^{i-1}}{i+1}+\frac{k^{n-1}}{n+1}$ **[§3.2-4.1]**
$^B♠$	1	$\frac{(1-y)^{n+1}}{(n+1)\left[1-y\sum_{i=0}^{n-1}(1-y)^i\right]}$ **[§3.2-4.bis.a]**	$\frac{1}{n+1}$ **[§3.2-4.1a]**
$^B♥$	-1	$(1-y)\frac{2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^{i-1}(1-y)^i}{i+1}+(-1)^{n-1}\frac{(1-y)^n}{n+1}}{1-y\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1-y)^i}$ **[§3.2-4.bis.b]**	$2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^{i-1}}{i+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ **[§3.2-4.1b]**

Ripetiamo i calcoli per n che tende all'infinito. La **[§3.2-4]** diventa:

$$ {}^{-B}e_k^{\infty}(y) = (1-y)\lim_{n\to\infty} \frac{(1-k)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}-1\right]+k^n\frac{(1-y)^n}{n+1}}{k\left[1-y\sum_{i=0}^{n-1}k^i(1-y)^i\right]} $$ **[§3.2-5]** che vale

$$ {}^{-B}e_k^{\infty}(y) = \frac{(1-y)(1-k)}{k}\,\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}-1}{1-y\sum_{i=0}^{\infty}k^i(1-y)^i} $$ **[§3.2-5.bis]**. Ma $\sum_{i=0}^{\infty}k^i(1-y)^i = \frac{1}{1-k(1-y)}$ **[§3.2-5.a]**,

quindi, trasformando il denominatore e semplificando: ${}^{-B}e_k^{\infty}(y) = \frac{1-k(1-y)}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k^i(1-y)^i}{i+1}$ **[§3.2-5.b]**. Si noti a questo punto che sviluppando in McLaurin per $x\in[0,1)$ abbiamo: $\ln(1-x) = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i}$ **[§3.2-5.c]**[cxxii]; da qui avremo la tavola sottostante:

Caso	k	${}^{-B}e^{\infty}(y)$	${}^{-B}e^{\infty}(0)$
generale	$\in[-1,1]$	$-\frac{1-k(1-y)}{k^2(1-y)}\{\ln[1-k(1-y)]+k(1-y)\}$ **[§3.2-5.ter]**	$-\frac{(1-k)[\ln(1-k)+k]}{k^2}$ **[§3.2-5.1]**
^{B} ♠	1	$\frac{y}{1-y}[(1-y)-\ln y]$ **[§3.2-5.ter.a]**	0[cxxiii] **[§3.2-5.1a]**
^{B} ♥	-1	$-\frac{2-y}{1-y}[\ln(2-y)-(1-y)]$ **[§3.2-4.ter.b]**	2(1-ln2) **[§3.2-5.1b]**

Naturalmente esiste una via molto più comoda per calcolare le retrocumulata, o le speranze di vita (specie alla nascita): prendere quelle relative al caso B e calcolarne i complementi, secondo quanto indicato nell'Appendice 3.

---

xcviii Denomino A questo tipo di funzione; gli indici p,q (od n, che useremo più in là) e k sono ovviamente sottintendibili in molti casi.

xcix Si tratta della formula di Achard, che traggo da Levi (cfr. nota **Errore. Il segnalibro non è definito.**).

c Nel caso della distribuzione bilanciata $p=q$ abbiamo $\frac{\partial l^A(n;y)}{\partial n} = \frac{\ln[(1-y)(1-ky)]}{2}\cdot l^A(n;y)$ **[§3.1-1.2]** (si ricordi che il logaritmo è negativo); nel caso più generale conviene porre $q=hp$, con $0<h<1$, e calcolare:

$$ \frac{\partial l^A(p;y)}{\partial p} = [\ln(1-y)+h\cdot\ln(1-ky)]\cdot l^A(p;y) = \ln\left[(1-y)\sqrt[\frac{1}{h}]{1-ky}\right]\cdot l^A(p;y) $$ **[§3.1-1.2.1]**.

ci Adottando la convenzione utilizzata per il **[§3.1-1.2.1]** varrebbe: $\mu^{A;p,q}(y) = p\left(\frac{1}{1-y}+\frac{hk}{1-ky}\right)$ **[§3.1-3.bis]**.

cii Si ricordi che n è qui un numero naturale.

ciii È infatti: $\lim_{n\to\infty}\left[1+k^{n-1}(-y)^n+(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}k^{i-1}(-y)^i\right] = 1+0+\frac{1+k}{k}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(-ky)^i = 1+\frac{1+k}{k}\left[\frac{1}{1+ky}-1\right]$

civ Ovvero per nessuno dei due modelli vale $l_k(y)+l_{-k}(1-y)=l(0)$; si veda il §2.1.

[cv] Possiamo arrivarci anche dalla **[§3.1-4]**, sviluppando il prodotto e tenendo conto del fatto che $\int \frac{\upsilon^r}{1+k\upsilon}d\upsilon = I(r) = k^{-(r+1)}\left[\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{r-1-i}\frac{(k\upsilon)^{i+1}}{i+1}+(-1)^r\ln(1+k\upsilon)\right]+c$ **[§3.1-6a]**. L'integrale appare con r=1, n, n+1 (e anche 0, ma in quel caso conviene porre direttamente $I(0)=\frac{\ln(1+k\upsilon)}{k}+c$ **[§3.1-6a.1]**. Per fortuna (esiste, in matematica?) le espressioni contenenti il logaritmo si elidono, e possiamo porre $(-1)^{2n-i}=(-1)^{2(n-i)}(-1)^{i}=(-1)^{i}$.

[cvi] Naturalmente possiamo ottenere la speranza di vita anche come età media alla morte meno l'età già raggiunta. Mettendo i decessi tra parentesi quadra, avremmo:

$${}^{B}e(y)=\frac{1}{(1-y)\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}\int_y^1\left[(1+k)\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-k\upsilon)^i+n(-k\upsilon)^{n-1}\right]\upsilon d\upsilon-y$$ **[§3.1-7 ter]**, che vale

$${}^{B}e(y)=\frac{(1+k)\sum_{i=0}^{n-2}\frac{i+1}{i+2}(-k)^i\sum_{j=0}^{i+1}y^j+\frac{n}{n+1}(-k)^{n-1}\sum_{j=0}^{n}y^j-y\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i}$$ **[§3.1-7 ter.1]**.

Verificare l'equivalenza con la **[§3.1-7]** è un po' macchinoso, anche se il denominatore si elimina subito. Con qualche piccolo aggiustamento partiamo allora da:

$$1-(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-k)^{i-1}}{i+1}\sum_{j=0}^{i}y^j-\frac{(-k)^{n-1}}{n+1}\sum_{j=0}^{n}y^j=(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{i+1}(-k)^{i-1}\sum_{j=0}^{i}y^j+\frac{n}{n+1}(-k)^{n-1}\sum_{j=0}^{n}y^j-y\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i$$

[§3.1-7 ter.2], che diventa, semplificando qualche sommatoria omogenea:

$$1=(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}\sum_{j=0}^{i}y^j+(-k)^{n-1}\sum_{j=0}^{n}y^j-y\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i$$ **[§3.1-7 ter.3]**.

Conviene moltiplicare ambedue i membri per (1-y) facendo così sparire le sommatorie in j, e togliere il primo termine all'ultima sommatoria, dalla quale estraiamo anche un (-k):

$$1-y=(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}(1-y^{i+1})+(-k)^{n-1}(1-y^{n+1})+ky(1-y)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^i-y+y^2$$ **[§3.1-7 ter.4]**.

In pochi passaggi arriviamo così a:

$$1-y^2=(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}-y(1+ky)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^i+(-k)^{n-1}(1-y^{n+1})$$ **[§3.1-7 ter.5]**, che nonostante le apparenze conferma la nostra verifica; va infatti tenuto presente che

$$y(1+ky)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^i=\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}y^{i+1}-\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i}y^{i+2}=y^2-(-k)^{n-1}y^{n+1}$$ **[§3.1-7 ter.6]**, mentre

naturalmente $(1+k)\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^{i-1}=\sum_{i=0}^{n-2}(-k)^i-\sum_{i=1}^{n-1}(-k)^i=1-(-k)^{n-1}$ **[§3.1-7 ter.7]**.

[cvii] L'espressione è indefinita per y unitario. Ma scindendo la parte logaritmica e trasformandola secondo Taylor, vediamo che il limite per $y\to1$ vale:

$$\lim_{y\to1}\frac{1+ky}{1-y}\left[(1+k)\ln\frac{1+k}{1+ky}-k(1-y)\right]=(1+k)\lim_{y\to1}\frac{(1+k)\left\{\ln(1+k)-\left[\ln(1+k)+k\frac{y-1}{1+k}\right]\right\}-k(1-y)}{1-y}$$

$$=(1+k)\lim_{y\to1}\frac{k(1-y)-k(1-y)}{1-y}=(1+k)(k-k)=0$$ **[§3.1-7.1bis1]**

[cviii] Ripetendo l'operazione in questo caso particolare:

$$\lim_{y\to1}\frac{1+y}{1-y}\left[2\ln\frac{2}{1+y}-(1-y)\right]=2\lim_{y\to1}\frac{2\left[\ln 2-\left(\ln 2+\frac{y-1}{2}\right)\right]+(1-y)}{1-y}=2\lim_{y\to1}\frac{-(1-y)+(1-y)}{1-y}=2(1-1)=0$$

[§3.1-7.1a1] (questo perché l'azzeramento al numeratore prevale sullo zero al denominatore).

[cix] Deriva immediatamente dalla **[§3.1-7.1b]**; per ricavarla dalla **[§3.1-8.1]**, si tenga presente che $\lim_{k\to-1}(1+k)\ln(1+k)=\lim_{x\to0}x\ln x=0$ (si risolve facilmente con la formula di de l'Hôpital).

[cx] L'Integrale si calcola con la sostituzione $z = 1+ky$.

[cxi] Per y=0 il valore va calcolato al limite, e restituisce *l(0)*, come deve (il logaritmo sviluppato in McLaurin vale 2*y*).

[cxii] Si noti che i sopravviventi all'età 1 (quella finale) sarebbero ancora la metà del contingente iniziale, destinati quindi a morire tutti insieme allo scoccare del fatale momento. ${}^{B}\mu^{\infty}{}_{\spadesuit\heartsuit}=\frac{1}{1+y}$ **[§3.1-9.1a2]**.

[cxiii] La prima formulazione è ottenuta dalla **[§3.1-4]**, la seconda dalla **[§3.1-4a]**. Quest'ultima è esprimibile, fra l'altro, anche come ${}^{B}d(y)=l(0)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-ky)^i+k(1-y)\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^i\right]$ **[§3.1-9.ter]**, o come ${}^{B}d(y)=l(0)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)(-ky)^i+k\sum_{i=0}^{n-2}(i+1)(-ky)^i\right]$ **[§3.1-9.quater]**.

[cxiv] Tale incremento sarà positivo per $(-ky)^{n-2}[k(n-1)-kny]>0$ **[§3.1-9.1a]**. Per $(-ky)^{n-2}<0$ (quindi se abbiamo contemporaneamente *n* dispari e *k* positivo) sarà: $k(n-1)-kny<0\Rightarrow n-1-ny<0\Rightarrow y>\frac{n-1}{n}$ **[§3.1-9.1a.1]**.

Se invece *n* è pari e *k* positivo, avremo: : $k(n-1)-kny>0\Rightarrow n-1-ny>0\Rightarrow y<\frac{n-1}{n}$ **[§3.1-9.1a.2]**. Se infine *n* è pari e *k* negativo: $k(n-1)-kny>0\Rightarrow n-1-ny<0\Rightarrow y>\frac{n-1}{n}$ **[§3.1-9.1a.3]**, tornando così all'esito della **[§3.1-9.1a.1]**. I decessi quindi tendono ad aumentare al crescere di *n* sempre più a ridosso dell'età finale nei casi ♦. In quelli ♣, abbiamo invece un'oscillazione tra *n* pari e dispari.

[cxv] La **[§3.1-11]** si può anche ottenere come limite per $n\to\infty$ della **[§3.1-10]**; deve infatti essere:

$${}^{B}\mu^{\infty}(y)=\lim_{n\to\infty}{}^{B}\mu^{n}(y)\Rightarrow\frac{1}{1-y}+\frac{k}{1+ky}=\frac{1}{1-y}+k\frac{\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(-ky)^i}{\sum_{i=0}^{\infty}(-ky)^i}$$

[§3.1-11.1]; avremo allora:

$$\frac{1}{1+ky}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(-ky)^i}{\frac{1}{1+ky}}\Rightarrow\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(-ky)^i=\frac{1}{(1+ky)^2}$$

[§3.1-11.1a]. Basterà a questo punto notare che lo sviluppo di McLaurin di $\frac{1}{(1-x)^2}$ è $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i$ **[§3.1-11.1ab]**, o più semplicemente ponendo $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)^2$ **[§3.1-11.1ab bis]**, sostituendo poi –*ky* ad *x*. Lo stesso processo è proponibile per i casi notevoli in tabella.

[cxvi] Scambiando *y* con *(1-y)* – ovvero *x* con *(ω-x)* nel caso più generale. In questo studio si moltiplica inoltre il parametro *k* per -1: cambiarne il segno assicura che se mantenga il significato originale (favorevole alla sopravvivenza se negativo, viceversa se positivo).

[cxvii] La formula vale anche per *n* non intero.

[cxviii] Nell'integrazione aiuta il cambio di variabile $z=k(1-\upsilon)$.

[cxix] Il *k* è incluso nella risistemazione per meglio semplificare la formula. Si noti che *i* deve però diventare *i+1*.

[cxx] Un metodo alternativo per ottenere la **[§3.2-3]** è quello di ricavarla dal modello B, ricordando come si dividono le strisce del rettangolo risultante dalla giustapposizione dei modelli complementari; in formula:

${}^{-B}T_k^n(y) = l(0)(1-y) - \left[{}^{B}T_{-k}^n(0) - {}^{B}T_{-k}^n(1-y)\right]$ **[§3.2-3.1]**. Naturalmente varrà anche la:
${}^{B}T_k^n(y) = l(0)(1-y) - \left[{}^{-B}T_{-k}^n(0) - {}^{-B}T_{-k}^n(1-y)\right]$ **[§3.2-3.1a]**.

[cxxi] In questa versione della formula elimino il *k* al denominatore.

[cxxii] Il nostro caso sarà quindi $-\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i}$ **[§3.2-5.d]**, poi dovremmo sostituire *k*(1-*y*) a *x* e sottrarre 1.

[cxxiii] Si veda la cix.