## §4 Conclusioni

Le curve che abbiamo preso in considerazione non sono state concepite per descrivere la mortalità umana: piuttosto, esse mirano ad un uso didattico-dimostrativo per quanto riguarda possibili elaborazioni. Naturalmente è possibile che queste curve, probabilmente poco adatte per lo studio della popolazione, possano rivelarsi utili per quelle applicazioni esotiche della demografia che non fanno riferimento a persone, bensì ad altri soggetti (scorte di magazzino e così via).
Le condizioni di partenza, illustrate in apertura, sono schematicamente:

I. $x \in [0, \omega]$;
II. *l(0)* > 0;
III. *l(ω)* = 0;
IV. *l'(x)* ≤ 0, ovvero *d(x)* ≥ 0.

Da queste ipotesi discendono:

V. *l(x)* ≥ 0;
VI. *l(x)* ≤ *l(0)*.

Inoltre può essere desiderabile avere anche:

VII. *T(x)* ≠ ∞.

Lo studio della legge di mortalità associata ad una semplice quadratica porta ad alcuni approfondimenti. Voglio ricordare tra questi:

1. la riunificazione di alcuni modelli storici di sopravvivenza in un'unica struttura concettuale (oltre a de Moivre, cfr. note iii, xi, xcix per Babbage, Achard e Littrow);
2. la facilità di focalizzazione su termini relativi anziché assoluti. Questo grazie all'individuazione di un parametro *k* dal campo di esistenza ben definito (si vedano la **[§1.0-8]** e la **[§2.0-2]**);
3. la generazione di funzioni distinte non solo come sottocasi particolari del caso generale (lineare, ♠, ♥), ma anche quali generalizzazioni (si veda il §3), situazioni-limite (per $n \to \infty$) o elaborazioni (la media per intervalli di *k*, o la semisomma puntuale);
4. l'emergere del tempo di vita residuo massimo come coefficiente in diverse funzioni (sopravviventi, speranza di vita);
5. la frequenza di apparizione nelle formule del fattore (1+*k*), che si annulla nel caso ♥;
6. la comparsa di una struttura additiva nel tasso istantaneo di mortalità (**[§1.1-3]**, **[§2.1-8 bis]**, **[§3.1-10]**, **[§3.1-11]**)[cxxiv];
7. l'interpretazione data alla "vita probabile" (cfr. §2.3.1);
8. la sovrapponibilità di due popolazioni caratterizzate da legge quadratica in una scatola di Edgeworth, utile per studiare la distribuzione del tempo di vita tra due popolazioni teoricamente concorrenti.

## §A1 - Appendice 1: mondi paralleli

### *§A1.1 – Il gioco delle coppie*

Dalla **[§1.0-3]** abbiamo visto che *a* e *b* sono legati funzionalmente a causa della condizione *III*.
Nella **[§1.0-4]** abbiamo pertanto ricavato *b*. Un procedimento alternativo, dotato però di minor suggestione intuitiva, consiste nel porre: $a = -\frac{b\omega + 1}{\omega^2}$ **[§1.0-4 bis]**.

La nostra funzione diventa allora: $l(x) = l(0)\left[1 - \frac{1 + b\omega}{\omega^2}x^2 + bx\right]$ **[§1.0-5 bis]**, che si può riscrivere come: $l(x) = l(0)\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)\left[1 + \frac{x}{\omega} + bx\right]$ **[§1.0-5a bis]**.

La condizione sui decessi ci porta a: $d(x) = l(0)\left[2\frac{1+b\omega}{\omega^2}x - b\right]$ **[§1.0-6 bis]**.

Abbiamo adesso la condizione: $2\frac{1+b\omega}{\omega^2}x - b \geq 0$ **[§1.0-7 bis]**, da cui:

$b(\omega^2 - 2x\omega) = b\omega(\omega - 2x) \leq 2x$ **[§1.0-7a bis]**. Questo significa che:

| Età | condizione | risultato |
|---|---|---|
| per $0 \leq x < \frac{\omega}{2}$ | $b \leq \frac{2x}{\omega(\omega - 2x)}$ **[§1.0-7ba bis]** | la condizione più restrittiva è per x=0: $b \leq 0$ |
| per $x = \frac{\omega}{2}$ | avremmo $d(x) = l(0)\left(\frac{1}{\omega}\right)$ **[§1.0-7bb bis]** | qualsiasi *b*, ovvero: nessun vincolo |
| per $\frac{\omega}{2} > x \geq \omega$ | $b \geq \frac{2x}{\omega(\omega - 2x)}$ **[§1.0-7bc bis]** | la condizione più restrittiva è per *x* = *ω*: $b \geq -\frac{2}{\omega}$ |

Congiungendo queste condizioni, abbiamo: $-\frac{2}{\omega} \leq b \leq 0$ **[§1.0-8 bis]**. Avremo quindi:

| Caso | *b* | *l (x)* |
|---|---|---|
| ♠ | $-\frac{2}{\omega}$ | $l(0)\cdot\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^2$ **[§1.1-1 bis]** |
| DM | $-\frac{1}{\omega}$ | $l(0)\cdot\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)$ **[§1.1-2 bis]** |
| ♥ | 0 | $l(0)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)$ **[§1.1-3 bis]** |

## §A2 – Appendice 2: un cappa che tira

[*In stesura*]

## §A3 – Appendice 3: saper vedere il lato negativo delle cose

Accennavamo nel §3.2 ad un altro metodo per ottenere funzioni di sopravvivenza: ricalcarle (facevo l'esempio delle arti plastiche); ciò che otteniamo in fotografia (perlomeno quella a pellicola, oramai obsoleta) lo definiremmo il negativo. Per una rappresentazione grafica si veda la ***Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.***.

Dimostriamo ora alcuni semplici legami che, per *ω* finito, garantiscono la correttezza di questa funzione ricavata e anche alcuni precisi rapporti tra gli indicatori demografici delle due funzioni in termini di quella originaria – nel §3.2 ho invece calcolato direttamente dalla nuova funzione di sopravvivenza.

Poniamo la funzione-calco come: $l^c(x) = l(0) - l(\omega - x)$ **[§A3.1]**.

Sono rispettate le condizioni sia all'età 0 che a quella $\omega$. I decessi inoltre saranno positivi, dato che lo sono anche nella funzione di origine: $d^c{}_x = - l^{c'}{}_x = -l'(\omega\text{-}x) = d(\omega\text{-}x)$ **[§A3.2]**. Il tasso di mortalità varrà perciò: $\mu(x) = \dfrac{d^c(x)}{l^c(x)} = \dfrac{d(\omega - x)}{l(0) - l(\omega - x)}$

In quanto alla retrocumulata, avremo:

$T^c(x) = \int_x^\omega l^c(\xi)d\xi = \int_x^\omega [l(0) - l(\omega - \xi)]d\xi$ **[§A3.1a]**. Introducendo poi il cambio di variabile $z = \omega - \xi$ **[§A3.1b]**, avremo: $T^c(x) = -\int_{\omega - x}^0 [l(0) - l(z)]dz = l(0)(\omega - x) - \int_0^{\omega - x} l(z)dz = l(0)\cdot(\omega - x) - [T(0) - T(\omega - x)]$ **[§A3.1c]**. Nel caso $x = 0$ avremo il comodo risultato: $T^c(0) = \omega l(0) - T(0)$ **[§A3.1c.1]**.

Il risultato è esposto graficamente in *Figura 1 - La retrocumulata della funzione rettangolarizzante*, nella quale il diagramma è orientato nel verso della funzione originaria (la funzione-calco ha i riferimenti in rosso); l'area cercata è quella evidenziata in alto a sinistra; la **[§A3.1c]** si accorda con la nostra intuizione, perché il primo addendo corrisponde al rettangolo di sinistra, che delimita la fascia di età che ci interessa, e il secondo sottrae la parte che attiene alla funzione originaria.

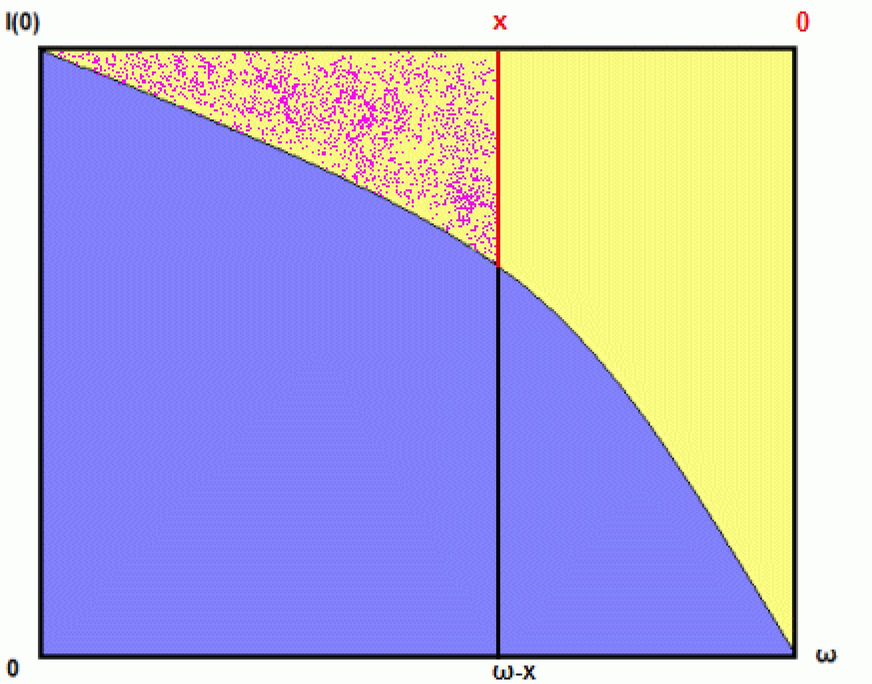


**Figura 1 - La retrocumulata della funzione rettangolarizzante**

## *§B – Bibliografia*


- s.a. *Parabola* (voce) in "Wikipedia", vers. italiana, http://it.wikipedia.org/wiki/Parabola_%28geometria%29
- s.a. *Tavola di mortalità* (voce) in "Wikipedia", vers. italiana, http://it.wikipedia.org/wiki/Tavola_di_mortalit%C3%A0
- Marcus N. ADLER. *Memoir of the late Benjamin Gompertz*. "The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries", vol. XIII. Londra, Layton, 1867
- David O. FORFAR. *Mortality Laws*.
  In: Jozef L. TEUGES e Biørn SUNDT (a cura di). "Encyclopaedia of Actuarial Science", vol.II. Wiley, Chichester, 2004

- Eugenio LEVI. *Corso di matematica finanziaria ed attuariale*. Giuffrè, Milano, 1964
- Joseph Johann VON LITTROW. *Ueber Lebensversicherungen und andere Versorgungsanstalten*. J.Beck'schen Universitäts-Buchhandlung, Vienna, 1832 http://dlib-pr.mpier.mpg.de/m/kleioc/0010/exec/books/%22166825%22
- Massimo LIVI BACCI. *Introduzione alla demografia.* Loescher, Torino, 1981, 1983
- Luciano PETRIOLI e Massimo BERTI, *Modelli di mortalità*. Franco Angeli, Milano, 1979


[cxxiv] In realtà è semplice capire come mai appaia questa somma, e proprio con quel semplice primo addendo. Basta infatti ricordare che in generale è: $l(x) = l(0)e^{-\int_0^x \mu(\xi)d\xi}$ **[§4-1]**. Con un generico $\mu(y) = \frac{1}{1-y} + f(y;k)$**[§4-2]**, avremo perciò: $l(y) = l(0)(1-y)e^{-\int_0^y f(\upsilon;k)d\upsilon}$ **[§4-2.1]**, la struttura moltiplicativa di base per il nostro modello nelle sue varie declinazioni.